پاسخنامه

محل مهر یا امضاء مدیر

سوال

جمهوری اسلامی ایران

اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران

اداره آموزش و پرورش منطقه ۶ تهران

ش صندلی(ش داوطلب):	نام واحد آموزشی: **دبیرستان انرژی اتمی ایران** نوبت امتحانی: دی ماه ۹۳ پایه: دوم	ساعت امتحان: ۸ صبح
نام و نام خانوادگی:	نام پدر: رشته های: تجربی و ریاضی وقت امتحان: ۱۳۰ دقیقه	تاریخ امتحان: ۱۳۹۳/۱۰/۱۷
سوالات امتحان درس: هندسه ۱	نام دبیر: جناب آقای قشلاقی سال تحصیلی: ۹۴- ۱۳۹۳	تعداد برگ: ۲ برگ

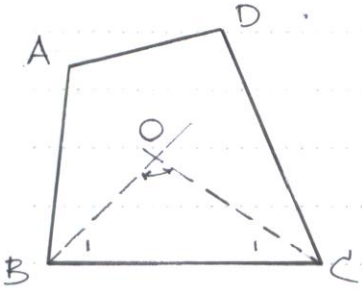
۱- مفاهیم زیر را تعریف کنید. (۱/۵ نمره)

الف) استدلال استنتاجی : روش نتیجه‌گیری براساس حقایقی (اصول، قضایا، ......) است که قبلاً درستی آنها را پذیرفته‌ایم

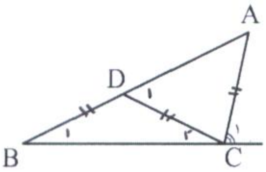
ب) ناحیه‌ی محدّب : ناحیه‌ای است که اگر دو نقطه‌ی دلخواه از آن را به هم وصل کنیم، پاره‌خط حاصل درون ناحیه قرار گیرد.

ج) اصل توازی : از هر نقطه بیرون یک خط، فقط یک خط می‌توان به موازات آن رسم کرد.

۲- ثابت کنید زاویه‌ی بین نیم‌سازهای داخلی دو زاویه‌ی مجاور هر چهارضلعی محدّب، برابر با نصف مجموع دو زاویه‌ی دیگر است. (۱ نمره)



$$\triangle BOC: \hat{O} = 180 - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1) = 180 - \left(\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right) = 180 - \left(\frac{B+C}{2}\right) = 180 - \left(\frac{360 - (\hat{A}+\hat{D})}{2}\right) = \frac{\hat{A}+\hat{D}}{2}$$



۳- در شکل روبرو $AC = CD = DB$ است. ثابت کنید : $\hat{C}_1 = 3\hat{B}$ (۱ نمره)

$$\triangle BDC: BD = DC \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_2 ,\quad \underset{\text{خارجی}}{\hat{D}_1} = \hat{B}_1 + \cancel{\hat{C}_2}^{\hat{B}_1} = 2\hat{B}_1$$

$$\triangle ADC: AC = CD \Rightarrow \hat{A} = \hat{D}_1 = 2\hat{B}_1$$

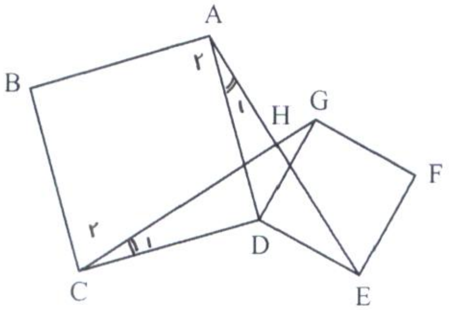
$$\triangle ABC: \underset{\text{خارجی}}{\hat{C}_1} = \cancel{\hat{A}}^{2\hat{B}_1} + \hat{B}_1 = 2\hat{B}_1 + \hat{B}_1 = 3\hat{B}_1$$

۴- عبارت های زیر را با کلمات مناسب کامل کنید.(۰/۷۵ نمره)

الف) مجموع زوایای خارجی هر چندضلعی محدّب، ...۳۶۰°... است.

ب) در مثلث متساوی الساقین، نیم ساز زاویه‌ی خارجی رأس با .قاعده.. موازی است.

ج) در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر... نصف اندازه‌ی وتر است.



۵- در شکل زیر، چهارضلعی‌های ABCD و DEFG مربّع اند. ثابت کنید : (۲ نمره)

الف) $AE = BD$ ب) $AE \perp CG$

$$\widehat{CDA} = \widehat{GDE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{CDA} + \widehat{ADG} = \widehat{ADG} + \widehat{GDE}$$

$$\Rightarrow \widehat{CDG} = \widehat{ADE}$$

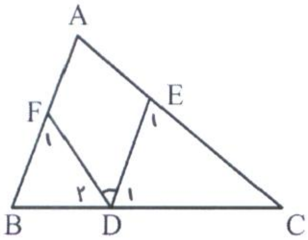
$$\left.\begin{array}{l} AD = CD \\ \widehat{CDG} = \widehat{ADE} \\ DE = DG \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \triangle ADE \cong \triangle CDG \xrightarrow[\text{متناظر}]{\text{تساوی اجزای}} \left\{\begin{array}{l} AE = CG \\ \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \end{array}\right.$$

$$ABCH: (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + B + \hat{C}_2 + \hat{H} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \cancel{\hat{A}_2}^{90^\circ} + \cancel{\hat{B}}^{90^\circ} + (\hat{C}_1 + \hat{C}_2)^{90^\circ} + \hat{H} = 360 \Rightarrow 270^\circ + \hat{H} = 360$$

$$\Rightarrow \hat{H} = 360^\circ - 270^\circ = 90$$

۶- در شکل روبرو $BF = BD$ و $CE = CD$ است. زاویه‌ی D را بر حسب زاویه‌ی A بیابید. (۱/۵ نمره)



$\triangle BDF: BD = BF \Longrightarrow \hat{D}_2 = \hat{F}_1$

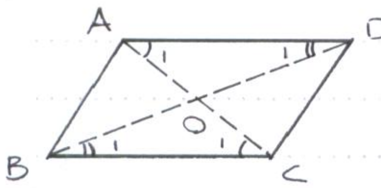
$\triangle CDE: CD = CE \Longrightarrow \hat{D}_1 = \hat{E}_1$

$$\left.\begin{array}{l} \triangle CDE: \hat{D}_1 + \overset{\hat{D}_1}{\cancel{\hat{E}_1}} + \hat{C} = 180^\circ \\ \triangle BFD: \hat{D}_2 + \overset{D_2}{\cancel{\hat{F}_1}} + B = 180^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{جمع}} 2(\hat{D}_1 + \hat{D}_2) + (B + C) = 360^\circ$$

$$\Longrightarrow 2(D_1 + D_2) + (180 - A) = 360^\circ \Longrightarrow \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 90 + \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\hat{D} + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 = 180^\circ \Longrightarrow D = 180 - (\hat{D}_1 + \hat{D}_2) = 180 - (90 + \frac{\hat{A}}{2}) = 90 - \frac{\hat{A}}{2}$$

۷- ثابت کنید در هر متوازی الاضلاع، قطرها منصَفند. (۱/۲۵ نمره)



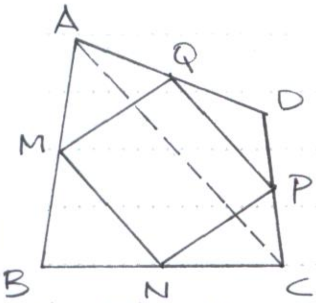
$AD \parallel BC$, AC مورب $\xrightarrow{\text{ق موازی و مورب}} \hat{A}_1 = \hat{C}_1$

$AD \parallel BC$, BD مورب $\xrightarrow{\text{ق موازی و مورب}} \hat{D}_1 = \hat{B}_1$

$$\left.\begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{C}_1 \\ AD = BC \\ \hat{D}_1 = \hat{B}_1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \triangle AOD \cong \triangle COB \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} AO = OC \\ BO = OD \end{array}\right.$$

پس قطرها منصفند.

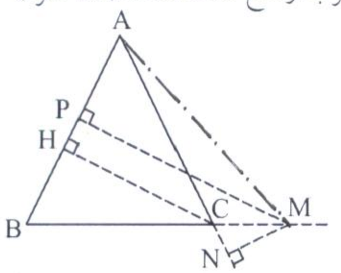
۸- ثابت کنید وسط‌های اضلاع هر چهارضلعی، رأس‌های یک متوازی الاضلاع هستند. (۱ نمره)



$$\left.\begin{array}{l} \triangle ACD: DQ = QA, DP = PC \xrightarrow{\text{ق میان خط}} PQ \overset{\parallel}{=} \frac{AC}{2} \\ \triangle BAC: BM = MA, BN = NC \xrightarrow{\text{ق میان خط}} MN \overset{\parallel}{=} \frac{AC}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$PQ \overset{\parallel}{=} MN \longrightarrow MNPQ$ متوازی‌الاضلاع است.

۹- نشان دهید تفاضل فواصل هر نقطه‌ی دل‌خواه بر روی امتداد قاعده‌ی مثلث متساوی‌الساقین، از دو ساق، برابر با ارتفاع مثلث است. (۱/۵ نمره)

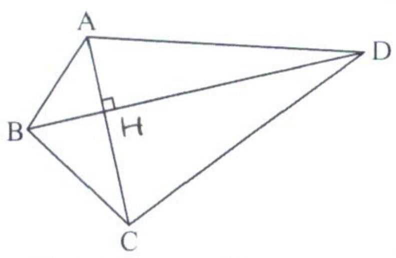


$S_{AMB} - S_{AMC} = S_{ABC}$, $AB = AC = a$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} MP.a - \frac{1}{2} MN.a = \frac{1}{2} CH.a$$

$$\Longrightarrow \cancel{\frac{1}{2}a}(MP - MN) = \cancel{\frac{1}{2}a}.CH \Longrightarrow MP - MN = CH$$

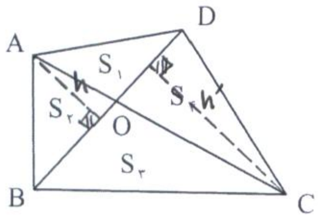
۱۰- ثابت کنید اگر قطرهای یک چهارضلعی برهم عمود باشند، مساحت چهارضلعی برابر نصف حاصل‌ضرب اندازه‌ی دو قطر خواهد بود. (۱ نمره)



$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{CBD} = \frac{1}{2} AH.BD + \frac{1}{2} CH.BD$$

$$= \frac{1}{2} BD(\overbrace{AH + CH}^{AC}) = \frac{1}{2} BD.AC$$

۱۱- در شکل روبرو ثابت کنید : $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ (۱/۵ نمره)



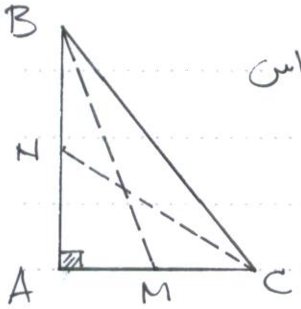
$$\frac{S_{AOD}}{S_{AOB}} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{h}\cdot OD}{\frac{1}{2}\cancel{h}\cdot OB} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{OD}{OB}$$

$$\frac{S_{ODC}}{S_{OBC}} = \frac{\frac{1}{2}\cancel{h'}\cdot OD}{\frac{1}{2}\cancel{h'}\cdot OB} \Rightarrow \frac{S_4}{S_3} = \frac{OD}{OB}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$$

$$\Rightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$$

۱۲- در هر مثلث قائم‌الزاویه به رأس A ثابت کنید : $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$ (۱/۵ نمره)



درهر مثلث قائم الزاویه، میانه‌ی وارد بر وتر، نصف وتر است. هم چنین در مثلث روبه‌رو براساس قضیه‌ی فیثاغورس: $b^2 + c^2 = a^2$

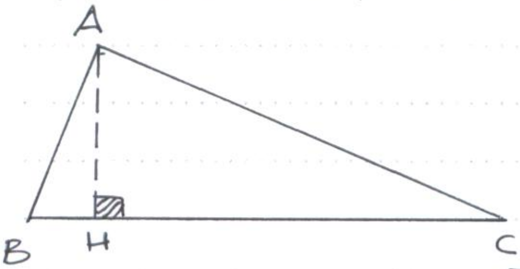
$\triangle ABM: \hat{A} = 90^\circ \xrightarrow{\text{ق فیثاغورس}} BM^2 = AM^2 + AB^2$

$\triangle ANC: \hat{A} = 90^\circ \xrightarrow{\text{ق فیثاغورس}} CN^2 = AN^2 + AC^2$ +

$\Rightarrow m_b^2 + m_c^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4} + b^2 + c^2 = \frac{5}{4}(b^2 + c^2)$

$\Rightarrow m_b^2 + m_c^2 = \frac{5}{4}a^2 = \frac{5}{4}(2m_a)^2 = 5m_a^2$

۱۳- اگر AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC باشد، ثابت کنید : الف) $AH^2 = BH.CH$ ب) $AB^2 = BH.BC$ (۲ نمره)



الف)

$\triangle ABC: \hat{A} = 90^\circ \xrightarrow{\text{ق فیثاغورس}} AB^2 + AC^2 = BC^2$

$\triangle ABH: \hat{H} = 90^\circ \xrightarrow{''} AH^2 + BH^2 = AB^2$

$\triangle AHC: \hat{H} = 90^\circ \xrightarrow{''} AH^2 + CH^2 = AC^2$ $\xrightarrow{\text{جمع}}$

$2AH^2 + BH^2 + CH^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2 = (BH + CH)^2$

$\Rightarrow 2AH^2 + \cancel{BH^2} + \cancel{CH^2} = \cancel{BH^2} + \cancel{CH^2} + 2BH\cdot CH$

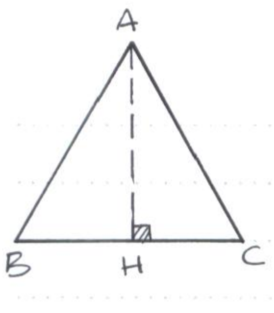
$\Rightarrow \cancel{2}AH^2 = \cancel{2}BH\cdot CH \Rightarrow AH^2 = BH\cdot CH$

ب)

$\triangle ABH: \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2 = BH\cdot CH + BH^2 = BH(CH + BH)$

$\Rightarrow AB^2 = BH\cdot BC$

۱۴- ثابت کنید مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، برابر با $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است. (۱ نمره)



درمثلث متساوی الساقین، میانه وارتفاع وارد بر قاعده، برهم منطبق اند.

$\triangle ABC: AB = AC,\ AH \perp BC \Rightarrow BH = HC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$

$\triangle AHC: \hat{H} = 90^\circ \xrightarrow{\text{ق فیثاغورس}} AH^2 + HC^2 = AC^2$

$\Rightarrow AH^2 + \frac{a^2}{4} = a^2 \Rightarrow AH^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}AH\cdot BC = \frac{1}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} \times a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

۱۵- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$، ثابت کنید : $\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$ (۰/۷۵ نمره)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \xrightarrow{\text{جمع با یک}} \frac{b}{a}+1=\frac{d}{c}+1 \Longrightarrow \frac{b+a}{a}=\frac{d+c}{c}$$

$$\xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c}$$

۱۶- اگر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots=k$ باشد، ثابت کنید : $\frac{a+c+e}{b+d+f}=k$ خواهد بود. (۰/۷۵ نمره)

$$\frac{a}{b}=k \Rightarrow a=k.b \quad , \quad \frac{c}{d}=k \Rightarrow c=k.d \quad , \ldots$$

$$\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{k.b+k.d+k.f}{b+d+f}=\frac{k(\cancel{b+d+f})}{(\cancel{b+d+f})}=k$$

محل انجام محاسبات