# مرحله‌ی اول پانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

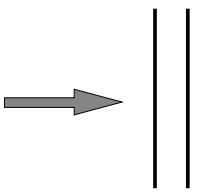
۱) ۱۰۰ کار قرار است توسط ۱۰ نفر اجرا شوند. زمان اجرای هر کار از قبل مشخص است. می‌خواهیم کارهایی که هر مجری باید انجام دهد را مشخص کنیم. فرض کنید افراد مجری دقیقاً مثل هم عمل می‌کنند. مثلاً اگر در زمان صفر دو کار به‌ترتیب با زمان‌های ۱۰ دقیقه و ۲۰ دقیقه را به یک مجری دهیم، او کار اول را دقیقاً در زمان ۱۰ دقیقه و دومی را در زمان ۳۰ دقیقه تمام می‌کند. الگوریتم زیر را برای تخصیص کارها به مجریان در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم در ابتدا (زمان صفر) همه‌ی مجریان بی‌کار و آماده‌ی اجرای کارهای تخصیص‌داده شده‌اند.

> ۱) همه‌ی کارها را به‌ترتیب زمان‌های اجرایشان به‌صورت صعودی مرتب کن و به همین ترتیب مورد بررسی قرار بده،
>
> ۲) کار مورد بررسی را به مجری‌ای بده که کارهایی که قرار است انجام دهد زودتر از بقیه تمام می‌شود.

فرض کنید که مجموع زمان‌های اجرای همه‌ی کارها ۱۰,۰۰۰ دقیقه و زمان اجرای طولانی‌ترین کار ۲۰۰ دقیقه است. بیش‌ترین زمانی که همه‌ی کارها تمام می‌شود حداکثر چند دقیقه است؟

الف) ۱,۱۸۰ ب) ۱,۵۰۰ ج) ۹۸۰ د) ۲,۰۰۰ ه) ۱,۰۰۰

۲) دو شیشه‌ی موازی با هم داده شده‌اند. از سمت چپ به این دو ۱۰۰ واحد نور می‌تابانیم. می‌دانیم هر یک از این شیشه‌ها اگر ۱۰۰ واحد نور دریافت کند، ۲۰ واحد آن را در جهت عکس تابش بر می‌گرداند، ۱۰ واحد را جذب می‌کند و ۷۰ واحد دیگر را در همان جهت تابش از خود عبور می‌دهد. چند واحد نور به سمت راست شیشه‌ها منتقل می‌شود؟



الف) ۴۹ ب) $۴۹ + \frac{۴۹}{۴}$ ج) $۴۹ + \frac{۴۹ \times ۴}{۱۰۰}$ د) ۷۰ ه) $۴۹ + \frac{۴۹ \times ۴}{۹۶}$

۳) به چند طریق عدد ۸ را می‌توان به صورت $a + ۲ \times b + ۴ \times c + ۸ \times d$ نوشت که در آن $a$، $b$، $c$ و $d$ دارای مقادیر صفر، ۱ یا ۲ هستند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۸

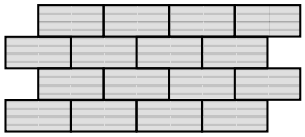
۴) مهره‌ای بر روی نقطه‌ی مبدأ صفحه‌ی مختصات قرار دارد. در هر حرکت می‌توانیم مهره را از نقطه‌ی $(x, y)$ به نقطه‌ی $(x + ۱, y + ۱)$ یا به نقطه‌ی $(x, y - ۱)$ ببریم. به‌چند طریق می‌توانیم این مهره را به نقطه‌ی $(۴, ۰)$ برسانیم؟

الف) ۳۵ ب) ۱۶ ج) ۲۵۶ د) ۷۰ ه) به نامتناهی روش

۵) ۵ گونی شکر به وزن‌های ۲، ۳، ۴، ۴ و ۶ و یک گونی خالی داده شده‌اند. می‌خواهیم همه‌ی شکرها را در یک گونی بریزیم. هر بار می‌توانیم یک عمل «ادغام» انجام دهیم. هر ادغام یعنی انتخاب دو عدد از گونی‌های شکر، مثلاً با وزن‌های $a$ و $b$، و یک گونی خالی، و ریختن کامل شکرهای دو گونی در گونی خالی. فرض کنید که هزینه‌ی انجام این ادغام برابر $a + b$ باشد. کم‌ترین هزینه‌ی کل انجام این کار چه‌قدر است؟

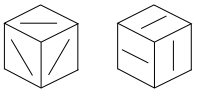
الف) ۱۹ ب) ۴۳ ج) ۴۶ د) ۵۱ ه) ۶۰

۶) به چند طریق می‌توان آجرهای شکل مقابل را با ۳ رنگ رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری‌که هیچ دو آجر مجاوری هم‌رنگ نباشند.

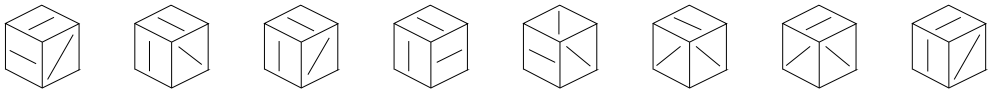


الف) $۳^۴$ ب) $۳ \times ۲^{۱۵}$ ج) ۳ د) $۳^۴ \times ۲^{۱۲}$ هـ) ۶

۷) بر روی هر یک از وجه‌های یک مکعب پاره‌خطی رسم کرده‌ایم، به‌طوری‌که هیچ دو پاره‌خطی در فضا موازی نیستند. این مکعب از دو گوشه (با مقداری دوران) به شکل‌های روبرو دیده می‌شود:



چند تا از شکل‌های زیر ممکن است، با مقداری دورانِ این مکعب، از گوشه‌ای از آن دیده شوند؟



الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۶

۸) آرش و آرمین با هم این بازی را انجام می‌دهند: آرش یک عددِ $x$ بین ۱ و ۱۳۸۴ انتخاب می‌کند و آرمین سعی می‌کند این عدد را حدس بزند. در هر مرحله آرمین یک عدد می‌گوید و آرش رابطه‌ی این عدد را نسبت به $x$ (بزرگ‌تر، کوچک‌تر یا مساوی) را مشخص می‌کند . اگر عدد آرمین از $۲x$ کوچک‌تر و بزرگ‌تر یا مساویِ $x$ باشد، آرمین برنده است. می‌خواهیم بدانیم کم‌ترین تعداد مرحله‌ی بازی که آرمین مطمئن است $x$ هر چه که باشد، دراین تعداد مرحله او بازی را خواهد برد، چند تاست؟

الف) ۶۹۲ ب) ۱۰ ج) ۹ د) ۴ هـ) ۳

۹) دنباله‌ای از اعداد ۱ تا ۱۳۸۳ را از چپ به راست نوشته‌ایم:

$$۱, ۲, ۳, ۴, \ldots, ۱۰, ۱۱, ۱۲, \ldots, ۱۳۸۲, ۱۳۸۳$$

از سمت چپ شروع می‌کنیم و به تعداد رقم یکان عدد فعلی جلو می‌رویم. بنابراین اعدادی که به آن‌ها بر می‌خوریم، عبارتند از $۱, ۲, ۴, ۸, \ldots$ تعداد این اعداد چندتاست؟

الف) ۲۳۱ ب) ۳۴۶ ج) ۳۴۵ د) ۲۷۷ هـ) ۲۷۸

۱۰) دو نفر این بازی را انجام می‌دهند: هر نفر در نوبت خود، یک رقم از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را بر روی کاغذ می‌نویسد و بازی پس از نوشتن رقم $n$ام خاتمه می‌یابد. نفر دوم قصد دارد کاری کند که در انتها مجموع ارقام نوشته شده بر ۹ بخش‌پذیر باشد. ولی نفر اول می‌خواهد از این کار جلوگیری کند. به‌ازای چه‌مقدار $n$ نفر دوم می‌تواند حتماً به هدف خود برسد؟

الف) ۱۳۸۲ ب) ۱۳۸۳ ج) ۱۳۸۴ د) ۱۳۸۶ هـ) ۱۳۸۸

۱۱) $N$ یک عدد ۱۳۸۳ رقمی با رقم سمتِ چپ ۶ است. اگر هر دو رقم متوالی $N$ را به‌عنوان یک عدد دو رقمی در نظر بگیریم، این عدد یا مضربِ ۱۷ است یا مضرب ۲۳. کدام گزینه زیر می‌تواند رقم سمت راست $N$ باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ هـ) ۹

۱۲) در بازی «سیب زمینی داغ»، ۵ بازی‌گر هستند با یک سیب زمینی داغ. زیرِ پای هر بازی‌گر یک شماره است. هر بازی‌گر مجبور است سیب زمینی داغ را یک ثانیه نگه دارد و سپس آن‌را به بازی‌گری که شماره‌اش زیر پای اوست بدهد. در این بازی شما با شماره‌ی ۱ شرکت کرده‌اید و در ابتدا سیب‌زمینی نزد شماست. برای چندتا از حالت‌های زیر ممکن است شماره‌ی زیر پای شما طوری باشد که دیگر سیب زمینی به‌دست شما برنگردد؟

- ۳ زیر پای ۲، ۴ زیر پای ۳، ۱ زیر پای ۴ و ۱ زیر پای ۵
- ۳ زیر پای ۲، ۴ زیر پای ۳، ۱ زیر پای ۴ و ۴ زیر پای ۵
- ۳ زیر پای ۲، ۱ زیر پای ۳، ۵ زیر پای ۴ و ۴ زیر پای ۵
- ۱ زیر پای ۲، ۲ زیر پای ۳، ۲ زیر پای ۴ و ۳ زیر پای ۵

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۱۳) به چند طریق می‌توان خانه‌های یک جدولِ $۳ \times ۱۰$ (۱۰ سطر و ۳ ستون) را با دو رنگِ سیاه و سفید رنگ کرد، به‌طوری‌که:

- رنگ خانه‌ها نسبت به ستونِ وسط متقارن باشد.
- از هر دو سطرِ متوالی حداقل یک خانه سیاه شده باشد.
- هیچ دو خانه‌ی سیاه مجاور هم نباشند. دو خانه مجاورند اگر یک ضلع مشترک داشته باشند.

الف) ۱,۰۲۴ ب) ۲,۰۴۸ ج) ۳,۰۷۳ د) ۱,۵۳۶ هـ) ۷۶۸

۱۴) عدد ۸۴ رقمی دودویی $x = x_{۸۲}x_{۸۱}\dots x_۱x_۰$ مفروض است. از $x$، عدد ۴۲ رقمی مبنای ۴ خاص $y = y_{۴۱}y_{۴۰}\dots y_۱y_۰$ را به‌شرح زیر می‌سازیم.

$$\begin{cases} y_۰ &= x_۰ - ۲x_۱ \\ y_i &= x_{۲i-۱} + x_{۲i} - ۲x_{۲i+۱} \\ y_{۴۱} &= x_{۸۱} + x_{۸۲} \end{cases}$$

به‌طوری‌که هر $y_i$ می‌تواند یکی از رقم‌های مجموعه‌ی $\{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\}$ را اختیار کند. چه رابطه‌ای بین $x = \sum_{i=۰}^{۸۲} x_i ۲^i$ و $y = \sum_{i=۰}^{۴۱} y_i ۴^i$ برقرار است؟

الف) $y = ۲x$ ب) $x = ۲y$ ج) $x = y$ د) $y = ۴x$ هـ) $y = -x$

۱۵) دنباله‌ی $A = \langle a_۱, \dots, a_n \rangle$ جای‌گشتی از اعداد ۱ تا $n$ است به‌طوری‌که برای $۱ \le i \le n - ۱$ یا $a_i = a_{i+۱} + ۵$ یا $a_i = a_{i+۱} - ۸$. بزرگ‌ترین مقدار $n$ چند است؟

الف) ۱۰ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د) ۱۳ هـ) ۱۴

۱۶) جای‌گشت $n$ عضوی $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ از اعداد ۱ تا $n$ را در نظر بگیرید. برنامه‌ی زیر این دنباله را مرتب می‌کند:

> دستورهای زیر را برای هر یک از مقادیر $i$ از ۱ تا $n$ تکرار کن:
> ◁ تا وقتی‌که $a_i$ برابر $i$ نیست، مقدار خانه‌ی $i$ را با مقدار خانه‌ی $a_i$ تعویض کن.

مثلاً اگر ورودی $\langle 5, 2, 3, 1, 4 \rangle$ باشد،

$$\langle 1,2,3,4,5 \rangle \xrightarrow{\text{تعویض ۳ و ۲}} \langle 1,3,2,4,5 \rangle \xrightarrow{\text{تعویض ۴ و ۱}} \langle 4,3,2,1,5 \rangle \xrightarrow{\text{تعویض ۵ و ۴}} \langle 5,3,2,1,4 \rangle$$

حداکثر تعداد تعویض‌ها برای تمام جای‌گشت‌های ۲۰۰۵ عضوی را در نظر بگیرید. باقی‌مانده‌ی این عدد بر ۵ چند است؟

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

۱۷) ۸ خانواده به یک مهمانی دعوت شده‌اند. تعداد اعضای خانواده‌ها به‌ترتیب برابر ۴، ۴، ۴، ۴، ۵، ۵، ۵ و ۵ نفرند. میزبان برای شام تعدادی میز در نظر گرفته است که هرکدام دقیقاً ۷ جای صندلی دارد. میزبان می‌خواهد جای نشستن هر فرد را از قبل تعیین کند به‌طوری‌که هیچ دو نفر از اعضای یک خانواده دور یک میز ننشینند. حداقل تعداد میزهای مورد نیاز چند تاست؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

۱۸) عدد $N$ داده شده است. $N$ را می‌توانیم هر بار در یک عدد صحیح دل‌خواه ضرب کنیم و سپس کلیه‌ی صفرهای عدد حاصل را از بین ببریم. هدف این است که با تکرار این کار در نهایت عدد حاصل تک رقمی شود. مثلاً ۲۱ را می‌توان با دو بار به ۶ تبدیل کرد: $\underbrace{۲۱ \xrightarrow{\times ۵} ۱۰۵ \longrightarrow ۱۵}_{۱} \underbrace{\longrightarrow ۶۰ \xrightarrow{\times ۴} ۶}_{۲}$

۱۱ را با حداقل چند بار تکرار این عمل می‌توان به یک عدد یک رقمی تبدیل کرد؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۶

۱۹) یک لامپ سالم در زیرزمین فقط به یکی از ۱۰ کلید مشابه در هالِ طبقه‌ی بالا وصل است. ۹ کلید دیگر به هیچ لامپی وصل نیستند. کلید متصل به لامپ، اگر در وضعیت روبه‌بالا قرار گیرد لامپ را روشن و اگر روبه‌پایین باشد آن را خاموش می‌کند. می‌خواهیم با حداقل تعداد پایین رفتن به زیرزمین، مشخص کنیم کدام‌یک از کلیدها به لامپ زیرزمین وصل است. می‌دانیم که لامپ با ۵ بار خاموش و روشن کردن متوالی حتماً می‌سوزد، و لامپ سوخته از سالم قابل تشخیص است. توجه کنید که فقط همان یک لامپ را در اختیار داریم و سوختن آن هم برای ما مهم نیست. با حداقل چند بار پایین رفتن می‌توان جواب مسئله را پیدا کرد؟ (توجه کنید که بالا رفتن‌ها را نمی‌شماریم.)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ هـ) ۵

۲۰) یک مکعب ۳ × ۳ × ۳ را به چند طریق می توان با مکعب‌مستطیل ۱ × ۱ × ۳ به‌طور کامل پر کرد؟

الف) ۱ ب) ۸ ج) ۲۴ د) ۲۷ هـ) ۲۱

۲۱) یک عدد صد رقمی دهدهی با ارقام ۱ تا ۹ مفروض است. آن‌را از چپ به راست به‌ترتیب زیر می خوانیم و عدد جدیدی می‌سازیم: اولین رقم سمت چپ را می‌خوانیم و به همان تعداد جلو می‌رویم، رقمی که به آن می‌رسیم را در عدد جدید قرار می دهیم و در عدد فعلی یک رقم جلو می‌رویم. این کار را تکرار می‌کنیم تا به انتهای عدد فعلی برسیم. سپس همین کار را با عدد جدید انجام می‌دهیم و عدد جدیدتری می‌سازیم تا وقتی نتوان عدد جدیدتری ساخت. مثال:

$$\text{۷}\ldots\ldots \xrightarrow{\text{عدد ساخته‌شده‌ی دوم}} \text{۲۶۷}\ldots\ldots \xrightarrow{\text{عدد ساخته‌شده‌ی اول}} \text{۱۲۳۴۵۶۷۸۹۲۴۵۶۷}\ldots\ldots \quad \text{(عدد اصلی)}$$

اگر عدد اولیه‌ی صد رقمی به گونه‌ای باشد که آخرین عدد ساخته‌شده ۹ رقمی شود، تعداد عددهای ساخته‌شده حداقل و حداکثر چند تا ست؟

الف) حداقل ۱ و حداکثر ۴ ب) حداقل ۳ و حداکثر ۳ ج) حداقل ۲ و حداکثر ۲
د ) حداقل ۱ و حداکثر ۲ ه) حداقل ۲ و حداکثر ۳

۲۲) عدد $N$ را «متوازن» می‌گوییم اگر مجموع تعداد ارقام ۱ در همه‌ی اعداد ۱ تا $N$ برابر $N$ باشد. مثلاً ۱ متوازن است. ۱۱ متوازن نیست چون مجموع تعداد ارقام ۱ آن (فقط در عددهای ۱، ۱۰ و ۱۱) برابر ۴ است. می‌دانیم که اولین عدد متوازن بزرگ‌تر از ۱ عدد ۱۹۹,۹۸۱ است. تعداد عددهای متوازن بین (و شامل) ۱۹۹,۹۸۱ تا ۲۰۰,۰۰۰ چند تاست؟

الف) ۱ ب) ۱۱ ج) ۱۲ د ) ۱۹ ه) ۲۰

۲۳) یک مربع ۱۰۰ × ۱۰۰ را به‌صورت شطرنجی رنگ کرده‌ایم. شخصی در گوشه‌ی بالا و سمت چپ این مربع که خانه‌ای سفید است ایستاده است. این شخص می‌خواهد با حرکت در این مربع پذ هر کدام از خانه‌ها حداقل یک‌بار ایستاده باشد. هزینه‌ی رفت و آمد برای حرکت او به این صورت است:

- از هر خانه به هر کدام خانه‌های مجاور (حداکثر ۴ خانه)، ۱ تومان.
- از هر خانه‌ی سیاه به هر خانه‌ی سیاه دیگر، رایگان است.

حرکت به غیر از دو صورت گفته‌شده در بالا ممکن نیست. حداقل هزینه‌ای که این شخص باید بپردازد چه‌قدر است؟

الف) ۹,۹۹۹ ب) ۵,۰۰۰ ج) ۴,۹۹۹ د ) ۵,۰۰۱ ه) ۹,۹۹۸

۲۴) اعداد ۰ تا ۱۲۷ را به‌ترتیب پشت سر هم نوشته‌ایم. حالا بین هر دو عدد XOR (یا $\oplus$) آن‌دو را می‌نویسیم. سپس اعداد اولیه را پاک می‌کنیم. این کار را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا تنها یک عدد باقی بماند. آن عدد چند است؟
$C = A \oplus B$ را به‌این صورت تعریف می‌کنیم: اگر $a_i$، $b_i$ و $c_i$ به‌ترتیب رقم‌های $i$ ام (از سمت راست) $A$، $B$ و $C$ در مبنای دو باشند، در این صورت $c_i = \begin{cases} ۰ & a_i = b_i \\ ۱ & a_i \neq b_i \end{cases}$. مثلاً $۲ = (۱۱۱)_۲ \oplus (۱۰۱)_۲ = ۷ \oplus ۵$.

الف) ۰ ب) ۱۲۷ ج) ۱ د ) ۶۴ ه) ۶۳

۲۵) چند عدد ۱۳ رقمی از ارقام $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ وجود دارد که مجموع هر سه رقم متوالی در آن زوج باشد؟

الف) $۲^{۱۳}$ ب) $۲^{۱۵}$ ج) $۲^{۱۱}$ د ) $۳ \times ۲^{۱۱}$ ه) $۴ \times ۳^{۱۱}$

۲۶) ۳۲ لامپ موجود است و هر کدام به یک کلید متصل است. در ابتدا بعضی از لامپ‌ها روشن و بعضی خاموش‌اند. ناگهان یک سیم متصل به یکی از لامپ‌ها اتصال کوتاه می‌کند خراب شده و باعث سوختن فیوز و در نتیجه قطع کل برق می‌شود. فیوز سوخته قابل استفاده‌ی مجدد نیست و باید تعویض شود. اگر کلیدِ لامپی که اتصالی دارد در وضعیت روشن قرار داشته باشد و فیوز سالمی را جای‌گزین کنیم فیوز جدید نیز خواهد سوخت. برای پیدا کردن کلید متصل به اتصال کوتاه چند عدد فیوز سالمِ جدید لازم است؟

الف) ۵ ب) ۱ ج) ۶ د) ۴ هـ) ۳۱

۲۷) یک چراغِ چشمک‌زن با سرعتِ $(a,b)$ چراغی است که به‌طور متناوب، $a$ ثانیه‌ی متوالی خاموش است و سپس برای $b$ ثانیه‌ی متوالی روشن می‌ماند، و مدام این چرخه را تکرار می‌کند. ($a$ و $b$ اعداد طبیعی هستند.) در مورد یک چراغ چشمک‌زن می‌دانیم:

۱) در ثانیه‌ی دهم خاموش بوده است. ۲) در ثانیه‌ی دوازدهم روشن بوده است.
۳) در ثانیه‌ی چهاردهم خاموش بوده است. ۴) در ثانیه‌ی شانزدهم روشن بوده است.

با این فرض که نمی‌دانیم چراغ از چه ثانیه‌ای شروع به‌کار کرده است، چند حالت ممکنِ $(a,b)$ برای سرعتِ این چراغ وجود دارد؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

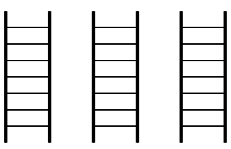
۲۸) دنباله‌ی $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ را در نظر بگیرید که $a_i \in \{+1, -1, +5, -5\}$. $S_j$ را مجموع $j$ عنصر اول دنباله تعریف می‌کنیم. می‌دانیم که هیچ $1 \le j \le n$ وجود ندارد که $S_j$ مضرب ۵ باشد. در هر گزینه یک زوج مرتب $(n, S_n)$ داده شده است. کدام گزینه‌ی زیر امکان‌پذیر است؟

الف) $(67,333)$ ب) $(83,334)$ ج) $(77,-256)$ د) $(93,-288)$ هـ) $(105,519)$

۲۹) یک جدول $2005 \times 2005$ در اختیار داریم که تمام خانه های آن سفید هستند. شخصی ۱۳۸۳ بار، یک سطر و یک ستون را انتخاب و رنگ همه‌ی خانه‌های آن سطر و آن ستون را بر عکس می‌کند. توجه کنید که رنگ خانه‌ی مشترک در سطر و ستون تغییر نمی‌کند. تعداد خانه‌های سیاه باقی‌مانده در جدول در انتها، کدام یک از گزینه های زیر می‌تواند باشد؟

الف) ۰ ب) ۲,۷۷۲,۹۱۵ ج) ۱۹۶,۰۷۸ د) ۳,۰۴۴,۸۵۴ هـ) ۲,۱۲۴

۳۰) آقای ملکی می‌خواهد از سه نردبان ۷ پله‌ای هواپیما که مانند شکل مقابل در کنار هم قرار دارند بالا برود و در بالاترین سطح قرار بگیرد. او در هر حرکت می‌تواند به یک پله بالاتر در یکی از نردبان‌های مجاور یا نردبانی که اکنون بر روی آن قرار دارد برود، ولی نمی‌تواند در یک حرکت از نردبان اول به نردبان سوم یا برعکس برود. اگر او در ابتدا بر روی اولین پله نردبان سمت راست باشد، به چند طریق می‌تواند خود را به یکی از پله‌های هفتم برساند؟



الف) ۷۰ ب) ۱۲۸ ج) ۱۶۹ د) ۱۸۲ هـ) ۲۳۹

۳۱) در ۳۰ کیسه ۳۲ کارت با شماره‌های ۱ تا ۳۲ ریخته‌ایم، به‌طوری که هیچ کیسه‌ای خالی نیست و نیز اگر کارت $i$ در کیسه‌ی $k$ باشد، کارت $i+1$ در کیسه‌ای با شماره‌ی کوچک‌تر از $k$ نیست. در ابتدا درِ کیسه‌ها بسته است و وقتی درِ یکی را باز می‌کنیم شماره‌ی کارت‌های آن‌را می‌بینیم. دستِ‌کم درِ چند کیسه را باید باز کنیم تا حتماً بتوانیم کارت ۱۳ را ببینیم؟

الف) ۲ ب) ۵ ج) ۶ د) ۱۳ هـ) ۳۲

۳۲) حداقل چند مستطیل $۳ \times ۲$ را باید در صفحه قرار دهیم به‌طوری‌که هم‌پوشانی نداشته باشند و بتوان آن‌ها را با موزائیک‌های به شکل مقابل کاملاً پوشاند؟ بدیهی است که دوران و تقارن مجاز است.

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۶ هـ) هرگز نمی شود.

۳۳) دنباله‌ی ۵ عضوی $\langle ۳, ۱, ۴, ۵, ۲ \rangle$ را در نظر بگیرید که عضو اول آن ۳ است. هر عمل «وارون» یعنی انتخاب یک $i$ و وارون کردن عضوهای اول تا $i$ام. مثلاً $\langle ۵, ۴, ۱, ۳, ۲ \rangle$ دنباله را پس از یک وارون نشان می‌دهد. با چندتا عمل وارون می‌توان دنباله‌ی ورودی را از چپ به راست به‌صورت صعودی مرتب کرد؟ کم‌ترین گزینه‌ی ممکن را انتخاب کنید.

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ هـ) ۸

۳۴) یک مکعب بزرگ $n \times n \times n$ را در نظر بگیرید. این مکعب را به $n^۳$ مکعب واحد تقسیم کرده‌ایم. دو نفر این بازی را روی مکعب بزرگ انجام می‌دهند: هر نفر در نوبت خود یک مکعب مستطیل $۱ \times ۱ \times n$، $۱ \times n \times ۱$ و یا $n \times ۱ \times ۱$ از مکعب بزرگ، که هیچ‌یک از مکعب‌های واحد آن رنگ نشده‌اند، را انتخاب کرده و مکعب‌های واحد آن را رنگ می‌کند. در ابتدا هیچ‌یک از مکعب‌های واحد رنگ نشده‌اند. هر کس نتواند در نوبت خود مکعب مستطیلی به شرح فوق انتخاب و رنگ کند بازنده خواهد بود. برای کدام‌یک از حالت‌های $n = ۱۰$، $n = ۱۱$، $n = ۱۲$ و $n = ۱۳$، نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که حتماً برنده شود؟

الف) همه‌ی حالات ب) هیچ یک از حالات ج) حالاتِ $n = ۱۱$ و $n = ۱۳$
د) حالتِ $n = ۱۱$ هـ) حالاتِ $n = ۱۰$ و $n = ۱۲$

۳۵) $n$ نفر دور میزی دایره‌ای شکل نشسته‌اند. هر نفر یا راستگوست یا دروغگو (راست‌گو همیشه راست و دروغ‌گو همیشه دروغ می‌گوید). هر کدام از این $n$ نفر این جمله را می‌گوید: «بین من و دو نفرِ سمتِ راست و دو نفرِ سمتِ چپِ من، دقیقاً $k$ نفر دروغ‌گو هستند.» کدام‌یک از گزاره‌هایِ زیر در مورد $r$، تعدادِ حالاتِ دروغ‌گو و راست‌گو بودنِ این افراد، درست است؟

الف) اگر $n = ۵۱$ و $k = ۴$، آن‌گاه $r = ۴$.
ب) اگر $n = ۵۰$ و $k = ۰$، آن‌گاه $r = ۰$.
ج) اگر $n = ۵۱$ و $k = ۵$، آن‌گاه $r = ۱$.
د) اگر $n = ۵۰$ و $k = ۱$، آن‌گاه $r = ٦$.
هـ) اگر $n = ۵۲$ و $k = ۱$، آن‌گاه $r = ٦$.

۳۶) دنباله‌ای از اعداد ۱, ۱− به طول ۸۴ به شکل زیر مفروض است که هر عدد را به ترتیب از راست‌به‌چپ $x_۰$ تا $x_{۸۳}$ نام‌گذاری می‌کنیم. دقت کنید که دنباله بعد از ’;‘ تکرار می‌شود.

۱, ۱, −۱, −۱, ۱, −۱; ۱, ۱, −۱, −۱, ۱, −۱; ۱, ۱, −۱, −۱, ۱, −۱; . . . ; ۱, ۱, −۱, −۱, ۱, −۱

معادل دودویی عدد $\sum_{i=۰}^{۸۳} x_i ۲^i$ چند رقم صفر دارد؟

الف) ۸۳ ب) ۸۲ ج) ۴۲ د ) ۴۱ هـ) ۴۰

۳۷) تعدادی کارت داریم که روی هریک، یک عدد نوشته شده‌است. دستگاه کارت برگردان دستگاهی است که اگر دو کارت با عددهای a و b به آن بدهیم، آن‌ها را نابود کرده و یک کارت باعدد $۲a + ۲b$ تولید می‌کند. (یعنی دو کارت را به یک کارت تبدیل می‌کند.) ۷ تا کارت با شماره‌ی ۱ داریم. می‌خواهیم با چند بار استفاده از دستگاه کارت برگردان بیش‌ترین عدد ممکن را تولید کنیم. این عدد چند است؟

الف) ۲۵۶ ب) ۱۹۰ ج) ۹۴ د ) ۸۲ هـ) ۵۲

۳۸) در پارکینگ مشتی ممدعلی سیستم عجیبی برای پارک کردن ماشین ها برقرار است. این پارکینگ هفت جای پارک دارد که به‌ترتیب با شماره‌های صفر تا شش مشخص شده اند. هر ماشینی که به پارکینگ وارد می شود ابتدا سراغ جای پارکی می‌رود که شماره‌ی آن برابر باقی مانده‌ی تقسیم شماره‌ی پلاک ماشین بر عدد هفت است. اگر این جای پارک پر بود به سراغ بعدی می رود (اگر جای پارک شماره شش پر بود به سراغ شماره صفر می‌رود) و همین طور ادامه می‌دهد تا به اولین جای پارک خالی برسد و آن‌جا پارک می‌کند و سپس ماشین بعدی وارد پارکینگ می‌شود. اگر در انتها ماشین‌ها در پارکینگ به ترتیب ۹۸, ۷۰, ۲۳, ۹۳, ۳۹, ۶۸, ۴۶ ایستاده باشند (پلاک شماره‌ی ۹۸ در جای پارک شماره‌ی صفر و پلاک ۴۶ در پارکینگ شماره‌ی ۶)، چند ترتیب ممکنِ اولیه برای ورود آن‌ها ممکن است؟

الف) ۵۰۴۰ ب) ۲۱۰ ج) ۳۰۵ د ) ۴۲۰ هـ) ۷۲۰

۳۹) آرش برای فرستادن تقاضای استخدام برای هر یک از ده شرکت مختلف مورد نظرش باید سه توصیه نامه از سه استاد مختلف خود (مجموعاً ۳۰ عدد) داشته باشد . چهار نفر از اساتید او به نام های دکتر قدسی، دکتر توسرکانی، دکتر جابری‌پور و دکتر اکبری برای او توصیه نامه خواهند نوشت. دکتر قدسی ۹ عدد، دکتر توسرکانی ۸ عدد، دکتر جابری پور ۷ عدد و دکتر اکبری ۶ عدد. آرش چند راه مختلف برای فرستادن این توصیه نامه ها دارد؟

الف) ۱۲,۶۰۰ ب) $\binom{۱۰}{۴}$ ج) $۴^{۱۰}$ د ) $۳^{۱۰}$ هـ) ۳,۰۲۴

۴۰) یک مکعب ۱ × ۱ × ۱ را به ۶۳۰ مکعب با ابعاد $\frac{۱}{۷} \times \frac{۱}{۹} \times \frac{۱}{۱۰}$ تقسیم می کنیم. اگر خطی که قطر اصلی این مکعب است را رسم کنیم، از داخل چند مکعب می گذرد؟

الف) ۸۵ ب) ۸۴ ج) ۲۵ د ) ۲۴ هـ) ۱۰