

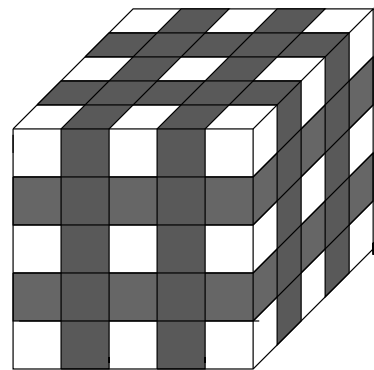
چهارمین المپیاد ملی کامپیوتر ایران

مسئله ۱ ۱۰ نمره

ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n می توان 7^n دایره به شعاع واحد را درون یک دایره به شعاع 3^n جا داد به طوری که هیچ دو دایره ای متقاطع نباشند. (هر دو دایره حداکثر در یک نقطه می توانند با هم اشتراک داشته باشند).

مسئله ۲ ۱۰ نمره

یک مکعب با اضلاع به طول $2n + 1$ از $(2n + 1)^3$ مکعب با اضلاع به طول واحد تشکیل شده است. وجوه خارجی این مکعب را با نوارهای یک در میان رنگ می زنیم. به عنوان مثال در شکل زیر یک مکعب $5 \times 5 \times 5$ به طور مطلوب رنگ آمیزی شده است:



تعداد مکعبهای به ضلع واحد که هیچ یک از وجوه آنها رنگ نشده است را بیابید.

مسئله ۳

نمره ۲۰

سیزده گلوله سفید رنگ در یک ردیف با فاصله مساوی از یکدیگر قرار داده شده‌اند. A و B بازی زیر را با همدیگر انجام می‌دهند:

ابتدا A تعداد k گلوله سفید رنگ را انتخاب کرده، با رنگ آبی رنگ می‌کند. سپس B تعداد k گلوله سفید رنگ را انتخاب کرده، با رنگ قرمز رنگ می‌کند. پس از این کار A گلوله‌های سفیدی را برمی‌دارد که به یک گلوله آبی نزدیکتر باشند تا به یک گلوله قرمز. همچنین B گلوله‌های سفیدی را برمی‌دارد که به یک گلوله قرمز نزدیکتر باشند تا به یک گلوله آبی. گلوله سفیدی که نزدیکترین فاصله‌اش با گلوله‌های آبی و قرمز مساوی باشد برداشته نمی‌شود. برنده بازی کسی است که بیشترین تعداد گلوله‌های سفید را بردارد.

اثبات کنید که به‌ازای $k = 1, 2, 6$ می‌تواند در این بازی برنده شود.

در بیان اثبات دقیق بوده و حتی‌الامکان با رسم شکل توضیح دهید.

مسئله ۴

نمره ۱۰

شش نفر با نامهای A, B, C, D, E و F را در نظر بگیرید. از این افراد تعدادی راستگو و تعدادی دروغگو هستند. برای تشخیص افراد دروغگو سؤال‌هایی از این افراد پرسیده‌ایم. بدین صورت که از فرد X پرسیده‌ایم که آیا Y راستگو است و یا دروغگو. این را هم می‌دانیم که راستگو همواره درست جواب می‌دهد ولی دروغگو ممکن است درست یا نادرست جواب دهد. از این سؤالات اطلاعات زیر بدست آمده است:

(۱) A می‌گوید: C دروغگو است.

(۲) B می‌گوید: C راستگو و A دروغگو است.

(۳) C می‌گوید: D راستگو و E دروغگو است.

(۴) D می‌گوید: F راستگو است.

(۵) E می‌گوید: F راستگو و C دروغگو است.

(۶) F می‌گوید: B دروغگو است.

اگر بدانیم که تعداد دروغگوها از دو نفر بیشتر نیست، افراد دروغگو را با ذکر استدلال مشخص کنید.

مسئله ۵

نمره ۲۰

n یک عدد طبیعی دلخواه است. یک ترتیب دلخواه از اعداد ۱ تا n که در آن هر یک از اعداد ۱ تا n دقیقاً یک بار آمده باشد را یک جایگشت از $\{1, 2, \dots, n\}$ می‌نامیم. می‌گوییم جایگشت p_1, p_2, \dots, p_n در دنباله a_1, a_2, \dots, a_k ظاهر شده است اگر اندیسهای $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq k$ وجود داشته باشند به طوری که برای

هر $1 \leq j \leq n$ داشته باشیم $a_{j_j} = p_j$. به عنوان مثال جایگشت ۱, ۳, ۲ در دنباله ۳, ۲, ۳, ۱, ۲, ۳ ظاهر شده است.

یک دنباله از اعداد ۱ تا n یک **دنباله جالب** نامیده می شود اگر هر جایگشت دلخواهی از $\{1, 2, \dots, n\}$ در این دنباله ظاهر شده باشد.

ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n حداقل یک دنباله جالب به طول $2^n - 1$ وجود دارد.

مسئله ۶ ۱۵ نمره

الگوریتم زیر را در نظر بگیرید. این الگوریتم روی سه آرایه a و b و c عملیاتی را انجام می دهد. عنصر i ام آرایه a را در این الگوریتم با نماد $a[i]$ نشان داده ایم.

(۱) عدد n را از ورودی دریافت کن.

(۲) برای هر $0 \leq i \leq 5$ ، $a[i]$ را مساوی $5 - i$ و $b[i]$ را مساوی باقیمانده تقسیم $i + 3$ بر 6 قرار بده.

(۳) مراحل زیر را n بار تکرار کن:

$c[i] = a[b[i]]$ برای هر $0 \leq i \leq 5$ قرار بده: (۳-۱)

$a[i] = c[i]$ برای هر $0 \leq i \leq 5$ قرار بده: (۳-۲)

$c[i] = b[a[i]]$ برای هر $0 \leq i \leq 5$ قرار بده: (۳-۳)

$b[i] = c[i]$ برای هر $0 \leq i \leq 5$ قرار بده: (۳-۴)

(۴) مقدار $a[1]$ را چاپ کن.

(۵) پایان

اگر ورودی برنامه $n = 1372$ باشد، خروجی برنامه چند است؟

مسأله ۷

نمره ۱۵

یک صفحه شطرنجی 4×4 با دو خانه A و B مطابق شکل زیر داده شده است. یک ربات می‌خواهد طبق شرایط زیر از A به B برود:

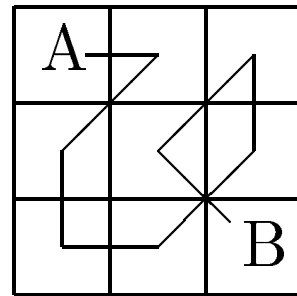
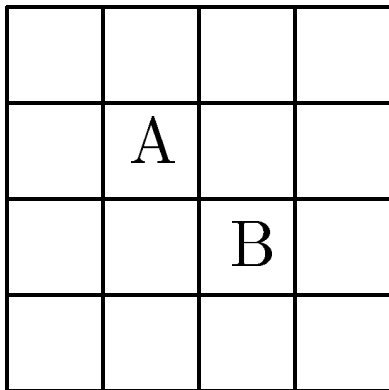
(۱) ربات در هر مرحله فقط می‌تواند از یک خانه به یکی از خانه‌های مجاورش (در یکی از جهتهای افقی، عمودی و یا مورب) برود.

(۲) ربات پس از هر حرکت باید جهت حرکتش در مرحله بعد را عوض کند.

(۳) ربات در مسیر حرکتش از A به B باید به هر یک از خانه‌ها دقیقاً یک بار برسد.

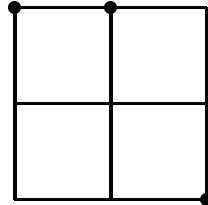
به عنوان مثال شکل زیر یک مسیر برای رسیدن از A به B در یک صفحه شطرنجی 3×3 را نشان می‌دهد.

یک مسیر برای رسیدن از A به B در صفحه شطرنجی 4×4 زیر پیدا کرده، شکل آن را در برگه پاسخنامه رسم کنید.



مسأله‌ی ۸ ۱۵ نمره

یک شبکه $n \times n$ مجموعه نقاطی از صفحه است که دارای مختصات صحیح هستند و هر یک از مختصات آنها عددی بزرگتر یا مساوی با ۱ و کوچکتر یا مساوی با n است. یک زیرمجموعه از نقاط یک شبکه را یک می‌نامیم اگر در بین تمام پاره خطهایی که می‌توان بین دو به دو آنها کشید هیچ دو تایی دارای طول مساوی نباشند. به عنوان مثال شکل زیر یک مجموعه عجیب در شبکه 3×3 را نشان می‌دهد:



(۱) در یک شبکه 4×4 یک مجموعه عجیب شامل ۴ نقطه پیدا کنید.

(۲) ثابت کنید که در هر شبکه $n \times n$ هر مجموعه عجیب حداکثر دارای n نقطه است.

مسأله‌ی ۹ ۳۰ نمره

یک ماتریس از اعداد طبیعی داده شده است. ابتدا هریک از سطرها را از سمت چپ به راست به صورت صعودی مرتب می‌کنیم. سپس هریک از ستونهای این ماتریس را از بالا به پایین به صورت صعودی مرتب می‌کنیم.

ثابت کنید که در ماتریس حاصل سطرها به صورت صعودی مرتب شده باقی می‌مانند. توضیحات خود را دقیق و با رسم شکل ارائه نمایید.

مسأله‌ی ۱۰ ۲۰ نمره

یک صفحه شطرنج 8×8 را در نظر بگیرید. یک قرار دادن ۸ مهره در این صفحه است به طوری که هیچ دو تایی از این مهره‌ها در یک سطر یا در یک ستون قرار نگرفته باشند.

۶۴ عدد صحیح متفاوت را در خانه‌های صفحه شطرنج قرار دهید به طوری که برای هر چیدن پراکنده مجموع اعداد نوشته شده در خانه‌هایی که در آنها مهره قرار گرفته است برابر با مقدار ثابت ۱۰۰ باشد.

مسأله‌ی ۱۱ ۳۵ نمره

یک جایگشت p_1, p_2, \dots, p_n از مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ یک نامیده می‌شود اگر برای هر $1 \leq i \leq n$ شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) اگر $2i \leq n$ ، آنگاه $p_i \leq p_{2i}$ ،

(ب) اگر $2i + 1 \leq n$ ، آنگاه $p_i \leq p_{2i+1}$.

(۱) ثابت کنید که اگر p یک جایگشت خوب باشد، برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم $p_1 \leq p_i$.

(۲) ثابت کنید که اگر p یک جایگشت خوب باشد، تعداد اعضای مجموعه

$$\{i \mid 1 \leq i \leq n, p_i \geq p_2\}$$

بزرگتر یا مساوی با $\frac{n-1}{2}$ است.

(۳) اگر $n = 2^k - 1$ باشد، T_k را مساوی با تعداد جایگشتهای خوب مجموعه $\{1, 2, \dots, n\}$ تعریف می‌کنیم. یک رابطه بازگشتی برای محاسبه T_k پیدا کنید.