مسئله‌ی اول: علی باینری .... ۲۰ امتیاز

علی کوچولو جمع اعداد دودویی را تازه یاد گرفته است و هنوز برخی از جمع‌ها را به‌خوبی انجام نمی‌دهد. در واقع او هنوز «دو بریک» (همان ده بر یک در مبنای دو) را حساب نمی‌کند. مثلاً اگر او بخواهد دو عدد ۱۰۱۰ و ۰۰۱۱ را جمع کند حاصل‌جمع را به‌صورت ۱۰۰۱ می‌نویسد، در صورتی‌که اگر «دو بر یک»ها را در نظر می‌گرفت جواب برابر ۱۱۰۱ می‌شد. در ضمن علی کوچولو یک بازی جدید یاد گرفته و بسیار هیجان‌زده است.

الف) (۱۰ امتیاز) او تمام رشته‌های از ۰ و ۱ به طول ۴ (به‌استثنای رشته‌ی ۰۰۰۰) را روی یک صفحه‌ی کاغذ نوشته است (جمعاً ۱۵ رشته)، هدف او از این بازی این است که این رشته‌ها را به ۴ دسته طوری تقسیم کند که وقتی دو عدد را از یک دسته جمع می‌کند حاصل‌جمع در یک دسته‌ی دیگر قرار داشته باشد (توجه کنید که علی کوچولو جمع دو عدد را به‌صورت بالا انجام می دهد). او چند روش را برای این تقسیم‌بندی امتحان کرده است ولی نتوانسته است این مسئله را حل کند و اکنون از شما می‌خواهد که به او کمک کنید.

این ۴ دسته‌بندی را بروی برگه‌ی پاسخ خود بنویسید.

ب) (۱۰ امتیاز) مادر علی کوچولو به او گفته که بلد است سؤال قسمت قبل را با ۳ دسته حل کند (یعنی ۱۵ رشته را به ۳ دسته و با همان شرایط تقسیم کند). با توجه به این اطلاعات ثابت کنید می‌توان تمام رشته‌های به طول ۴n به‌استثنای رشته‌ی ۰۰ . . . ۰ را به ۳n دسته طوری تقسیم کرد که جمعِ هیچ دو عدد از یک دسته (به‌روشِ علی کوچولو) در همان دسته نباشد.

مسئله‌ی دوم: جدول خوش ریخت .... ۲۵ امتیاز

می‌خواهیم خانه‌های یک جدول ۳ × n (با n سطر و ۳ ستون) که n عددی فرد است را با اعداد ۱ تا ۳n به‌گونه‌ای پر کنیم که هر عدد دقیقاً در یک خانه نوشته شود و مجموع اعداد نوشته شده در هر یک از n سطر با سطر های دیگر یکسان باشد. مثلاً برای ۳ = n، در جدول زیر که از اعداد ۱ تا ۹ پر شده است جمع اعداد خانه‌های هر سطر برابر ۱۵ است.

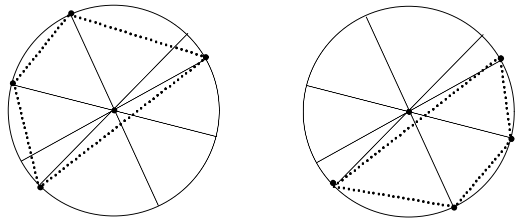
۸	۶	۱
۹	۴	۲
۷	۵	۳

آیا می‌توانید این کار را برای سایر مقادیر فردِ n انجام دهید؟ شما باید در جواب یک روش کلی برای پر کردن جدول‌های ۳ × n ارایه دهید.

مسئله‌ی سوم: قطرها .... ۲۵ امتیاز

در دایره‌ای n قطر مختلف رسم شده است. هر قطر دو نقطه‌ی انتهایی دارد (نقاط تلاقی قطر با دایره)، پس در مجموع ۲n نقطه انتهایی داریم. یک مجموعه‌ی «متعادل» مجموعه‌ای از n نقطه‌ی انتهایی است به‌گونه‌ای که دقیقاً یکی از دو نقطه‌ی انتهایی هر قطر در این مجموعه باشد، و علاوه بر آن، اگر یک n ضلعی ساده رسم کنیم که رئوس آن، نقاطِ عضو این مجموعه باشند، مرکز دایره داخل این n ضلعی قرار گیرد. (منظور از n ضلعی ساده، شکلی است با n راس و n ضلع که اضلاع آن فقط در رأس ها با یکدیگر برخورد می کنند).

مثلاً در یکی از دو شکل زیر نقاط مشخص شده یک مجموعه‌ی متعادل را تشکیل می‌دهند در صورتی‌که در شکل دیگر مجموعه‌ی مشخص شده متعادل نیست، چون مرکز دایره درون ۴ ضلعی قرار ندارد.



به‌ازای هر عدد طبیعی n ($n > 2$) اگر در دایره n قطر مختلف و دل‌خواه رسم کنیم، چند مجموعه‌ی متعادل مختلف از نقاط خواهیم داشت؟ ادعای خود را دقیقاً اثبات نمایید.

مسئله‌ی چهارم: صندوقچه‌های پر رمز و راز .... ۳۰ امتیاز

n صندوقچه‌ی جادویی با شماره‌های ۱ تا n داریم. زیرِ هر صندوقچه، یک عدد بین ۱ تا n نوشته شده است (ممکن است اعداد نوشته شده در زیر چند صندوقچه با هم یکسان باشند). توجه کنید ما نمی‌توانیم اعداد نوشته‌شده در زیر صندوقچه‌ها را بخوانیم.

در هر صندوقچه تعدادی یاقوت سرخ وجود دارد. ابتدا درِ همه‌ی صندوقچه‌ها بسته است، ولی می‌توان هر بار درِ یک صندوقچه را باز کرد، تعداد یاقوت‌های درون آن را شمرد و درِ آن‌را بست. نکته‌ی اسرارآمیز این صندوقچه‌ها آن‌است که به‌محض بستن درِ یک صندوقچه تمامی یاقوت‌های درون آن به صندوقچه‌ای منتقل می‌شوند که شماره‌ی آن، زیرِ این صندوقچه نوشته شده است.

به‌عنوان مثال، به جدول زیر توجه کنید:

شماره‌ی صندوقچه	عدد نوشته شده زیر صندوقچه	تعداد اولیه‌ی یاقوت‌ها
۱	۲	۶
۲	۲	۸
۳	۱	۳

اگر در ابتدا درِ صندوقچه شماره‌ی ۳ را باز کنیم، ۳ یاقوت می‌بینیم ولی به محض بستن درِ آن، این صندوقچه خالی شده و تمام یاقوت‌های آن به صندوقچه‌ی شماره ۱ منتقل می‌شود. حال اگر درِ صندوقچه‌ی شماره ۲ را باز کنیم، ۸ یاقوت می‌بینیم ولی با بستن در، چون زیرِ این صندوقچه عدد ۲ نوشته شده است ۸ یاقوت در همین صندوقچه باقی می‌مانند. سپس اگر درِ صندوقچه‌ی شماره‌ی ۱ را باز کنیم، ۹ یاقوت می‌بینیم (۶ یاقوت از قبل و ۳ یاقوت از صندوقچه‌ی شماره‌ی ۳). با بستن درِ آن، این صندوقچه هم خالی می شود و اکنون در صندوقچه‌ی شماره‌ی ۲، ۱۷ یاقوت موجود است. اگر دوباره درِ صندوقچه‌ی شماره‌ی ۱ را باز کنیم یاقوتی نمی‌بینیم.

توجه کنید که مجاز نیستیم هم‌زمان درِ چند صندوقچه را باز کنیم یا به یاقوت‌ها دست بزنیم؛ فقط می‌توانیم درِ یک صندوقچه‌ی دل‌خواه را باز کنیم، یاقوت‌های درون آن را بشماریم و درِ آن را ببندیم.

ثابت کنید با انجام عمل فوق (به تعدادِ دل‌خواه) می‌توان از تعداد کل یاقوت‌ها مطلع شد.