

مسئله‌ی پنجم: لامپ‌ها ۲۰ امتیاز

شرکت «برادران علی کوچولو» یک شرکت بزرگ تولید جغجغه‌های رنگی است که ساختمان آن تعداد زیادی اتاق و تعداد زیادی لامپ دارد. این شرکت برای سیم‌کشی لامپ‌های ساختمانش «آوریل دالتون» را استخدام کرده بود. بعد از سیم‌کشی معلوم شد که آوریل نه تنها از تعداد مساوی کلید و لامپ استفاده نکرده، بلکه هر کلید را به چند لامپ و هر لامپ را به چند کلید وصل کرده است. به این ترتیب، با زدن یک کلید، هر یک از لامپ‌های متصل به آن کلید تغییر وضعیت می‌دهد (یعنی از روشن به خاموش یا برعکس تغییر می‌کند). به این دلیل، در پایان هر روز که کارمندان می‌خواهند با زدن کلیدها همه‌ی لامپ‌ها را خاموش کنند با مشکل مواجه می‌شوند. (این تنها راه خاموش کردن لامپ‌هاست. قطع فیوز، یا شل کردن لامپ‌ها یا کارهای مشابهی دیگر مجاز نیست!) می‌دانیم که در آغاز هر روز همه‌ی لامپ‌ها خاموش‌اند. پس در پایان روز همیشه می‌توان بعضی از کلیدها را زد که همه‌ی لامپ‌ها دوباره خاموش شوند. شرکت برای حل مشکل خاموش کردن لامپ‌ها «لوک خوش‌شانس» را استخدام کرده است تا در پایان هر روز همه‌ی لامپ‌ها را خاموش کند. «لوک» پس از عقد قرارداد و بررسی مشکل، کلیدها را از ۱ تا N (N تعداد کلیدها) شماره‌گذاری کرد و جدولی با N خانه تهیه کرد تا در خانه‌ی i ام بنویسد که کلید i ام زده می‌شود یا خیر. او در انتهای هر روز، جدول را بر اساس وضعیت فعلی لامپ‌ها پر می‌کرد و بعضی از کلیدها را مطابق آن می‌زد. با این کار همه‌ی لامپ‌ها خاموش می‌شدند.

الف) (۱۰ امتیاز) ثابت کنید که تعداد جدول‌های مختلفی که لوک برای خاموش کردن همه‌ی لامپ‌ها در انتهای هر روز می‌تواند تهیه کند ثابت است و این تعداد بستگی به وضعیت لامپ‌ها در انتهای روز ندارد و فقط به نحوه‌ی سیم‌کشی آوریل وابسته است.

ب) (۱۰ امتیاز) ثابت کنید که این تعداد توانی از ۲ است.

مسئله‌ی ششم: جدول رنگی ۲۵ امتیاز

یک جدول «مجموعه‌ای»، جدولی با ۲ سطر و n ستون ($n \geq 2$) است که در هر یک از $2n$ خانه‌ی آن یکی از ۳ مجموعه‌ی $\{1, 2\}$ ، $\{1, 3\}$ و یا $\{2, 3\}$ نوشته شده است. دو خانه از جدول را «مجاور» می‌نامیم اگر در یک ضلع مشترک باشند. هم‌چنین فرض می‌کنیم خانه‌ی اول هر سطر و خانه‌ی n ام همان سطر مجاور هستند. (بنابراین هر خانه‌ی جدول دقیقاً با سه خانه‌ی دیگر مجاور است.)

اگر یکی از دو عدد مجموعه‌ی نوشته شده در هر خانه‌ی یک جدول مجموعه‌ای را پاک کنیم (در هر خانه تنها یک عدد باقی بماند)، به گونه‌ای که اعداد باقی مانده در هیچ دو خانه‌ی مجاور آن یکسان نباشند، یک جدول «رنگی» ساخته‌ایم.

برای مثال در زیر یک جدول مجموعه‌ای با دو جدول رنگی به دست آمده از آن نمایش داده شده است.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \leftarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \{1, 2\} & \{1, 3\} & \{1, 2\} & \{2, 3\} \\ \hline \{1, 3\} & \{1, 2\} & \{2, 3\} & \{1, 2\} \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline \end{array}$$

یک جدول مجموعه‌ای داده شده است که در آن هیچ دو خانه‌ی مجاوری وجود ندارند که مجموعه‌های نوشته شده در آن خانه‌ها یکسان باشد. ثابت کنید می‌توان از این جدول حداقل دو جدول رنگی مختلف ساخت.

مسئله‌ی هفتم: مرتب‌سازی کارت‌ی ۲۵ امتیاز

شرکت YSC دستگاه‌های الکترونیکی مختلفی را تولید و به بازار روانه کرده است. از جمله دستگاه کارت‌خوان، دستگاه مقایسه‌گر و کارت‌های مغناطیسی. هر یک از دستگاه‌های کارت‌خوان و نیز هر کارت مغناطیسی یک حافظه دارد که یک عدد در آن ذخیره می‌شود. هنگامی که یک کارت مغناطیسی را به دستگاه کارت‌خوان وارد کنیم دو نوع عمل می‌توانیم انجام بدهیم:

- با فشار دادن دکمه‌ی «سبز» دستگاه کارت‌خوان، عدد ذخیره شده در کارت پاک می‌شود و به‌جای آن عدد موجود در حافظه‌ی کارت‌خوان نوشته می‌شود.

- با فشار دادن دکمه‌ی «قرمز» عکس این عمل انجام می‌شود، یعنی عدد ذخیره شده در حافظه‌ی کارت‌خوان پاک می‌شود و به‌جای آن عدد موجود در حافظه‌ی کارت نوشته می‌شود.

کار دستگاه مقایسه‌گر آن است که وقتی دو کارت را به‌طور هم‌زمان به دو ورودی آن وارد کنیم دستگاه نشان می‌دهد که عدد ذخیره‌شده در کدام یک از کارت‌ها بزرگ‌تر است. در صورت مساوی بودن این دو عدد دستگاه آن‌را نیز مشخص می‌دهد.

در یک روز تعطیل، شرکت YSC تصمیم گرفت یک بازی دسته‌جمعی بین ۱۰۰ کارمند خود برگزار کند. برای این بازی ۱۰۰ دستگاه کارت‌خوان روی یک میز طولانی به‌ترتیب از چپ به راست قرار داده شد. هم‌چنین دو عدد کارت و یک دستگاه مقایسه‌گر و یک قلم و دفترچه‌ی یادداشت به هر کارمند داده شد.

این بازی در ۱۰۱ مرحله انجام می‌شود. در هر مرحله‌ی بازی، هر یک از کارمندان می‌تواند یکی از دستگاه‌های کارت‌خوان را انتخاب و یک بار از آن استفاده کند (یعنی یکی از کارت‌های خود را وارد آن دستگاه نماید، فقط یکی از کلیدهای سبز یا قرمز را فشار دهد و کارت را خارج کند). توجه کنید که هر دستگاه کارت‌خوان در هر مرحله تنها می‌تواند مورد استفاده‌ی یک کارمند قرار گیرد. اما هر کارمند می‌تواند به هر تعداد و در هر زمان از دستگاه مقایسه‌گر خود استفاده کند.

چون اعداد به‌صورت الکترونیکی در حافظه‌ها ذخیره می‌شوند کارمندان به هیچ روشی نمی‌توانند از مقدار عددی‌های ذخیره شده در حافظه‌ی کارت‌خوان‌ها یا کارت‌ها مطلع شوند. هم‌چنین هیچ‌یک از کارمندان نمی‌تواند کارت خود را در اختیار هم‌کارانش بگذارد یا به دستگاه مقایسه‌گر دیگران وارد کند.

در ابتدای بازی در حافظه‌ی هر یک از دستگاه‌های کارت‌خوان یک عدد ذخیره شده است به‌طوری‌که این اعداد از هم متمایزند. هدف آن است که اعدادی که در ابتدای بازی در حافظه‌ی کارت‌خوان‌ها ذخیره شده بودند در انتهای مرحله‌ی ۱۰۱ام به‌صورت مرتب‌شده از چپ به راست در حافظه‌ی کارت‌خوان‌ها قرار داشته باشند. یعنی کوچک‌ترین عدد از بین ۱۰۰ عدد اولیه، در پایان بازی در حافظه‌ی سمت چپ‌ترین کارت‌خوان، دومین عدد در حافظه‌ی کارت‌خوان بعدی و ... و به همین ترتیب بزرگ‌ترین عدد در حافظه‌ی سمت راست‌ترین کارت‌خوان ذخیره شده باشد. یک شیوه طراحی کنید که اگر کارمندان بر اساس آن قبل از شروع بازی هماهنگ شوند و بر طبق آن بازی کنند، به هدف بازی دست پیدا کنند. برای این کار نشان دهید که یک کارمند دل‌خواه در هر مرحله چه کاری و با کدام کارت‌خوان انجام می‌دهد.

