مرحله‌ی دوم بیست و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)

- جواب درست به سؤال‌های **یک** تا**دوازده** ۴ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱ نمره منفی دارد.
- جواب درست به سؤال‌های **سیزده** تا **هجده** ۶ نمره‌ی مثبت و جواب نادرست ۱/۵ نمره منفی دارد.

۱) کدام رقم، به عنوان سمت چپ‌ترین رقم نمایش دهدهی اعداد مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, ۴, ۸, \cdots , ۲^{۱۰۰}\}$ بیشتر ظاهر شده است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۱　　ب) ۲　　ج) ۴　　د) ۱ و ۲　　هـ) ۲ و ۴

۲) اعداد ۱ تا ۱۰ را دور دایره طوری قرار داده‌ایم که مجموع قدرمطلق اختلاف هر دو عدد مجاور بیشینه شده است. این مقدار بیشینه چند است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۵۴　　ب) ۵۳　　ج) ۵۲　　د) ۵۱　　هـ) ۵۰

۳) ۷ چراغ روشن روی یک ریسه خطی، پشت سر هم قرار دارند. آیدین و مرتضی به نوبت و تنها یک بار هر کدام یک چراغ از این ریسه را خاموش می‌کنند. پس از آن ارزش این ریسه که ۵ چراغ روشن دارد سنجیده می‌شود. ارزش ریسه به طور یکتا معلوم می‌شود و برابرست با حاصل‌ضرب طول تمام دسته‌های متوالی از چراغ‌های روشن. برای مثال اگر چراغ روشن را با ۱ و چراغ خاموش را با صفر نشان دهیم، ارزش ریسه‌ی ۱۱۰۰۱۱۱ برابر با ۶ و ارزش ریسه‌ی ۱۰۱۱۰۱۱ برابر با ۴ است. می‌دانیم آیدین دوست دارد ارزش ریسه نهایی تا حد امکان کم شود و مرتضی دوست دارد این ارزش زیاد بشود. اگر آیدین شروع کننده باشد و بهترین حرکتش را برای رسیدن به مقصودش انجام دهد، ارزش نهایی ریسه چند خواهد شد؟ اگر مرتضی شروع‌کننده باشد چه‌طور؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) آیدین ۴ و مرتضی ۶　　ب)آیدین ۴ و مرتضی ۴　　ج) آیدین ۵ و مرتضی ۵
د) آیدین ۶ و مرتضی ۴　　هـ)آیدین ۵ و مرتضی ۴

۴) ماشین «بازپرور» یک رشته‌ی ارقام در مبنای دو را به‌عنوان ورودی گرفته و یک رشته‌ی جدید برمی‌گرداند. اگر رشته‌ی ورودی $S = s_۱s_۲\cdots s_n$ باشد، این ماشین با در نظر گرفتن یک رشته خروجی تهی در ابتدا، از چپ به راست بیت‌های S را می‌خواند، سپس به ازای هر بیت که یک باشد خود S و به ازای هر بیت که صفر باشد نقیض S را به رشته خروجی می‌چسباند. منظور از نقیض یک رشته، رشته‌ای با همان طول است که هر بیت صفر آن به یک و هر بیت یک آن صفر شده باشد. برای مثال اگر به این ماشین رشته‌ی ۱۰۱۱ را بدهیم، رشته‌ی خروجی ۱۰۱۱۰۱۰۰۱۰۱۱۱۰۱۱ خواهد بود. واضح است که اگر طول رشته ورودی n باشد، طول رشته خروجی $n^۲$ خواهد بود.

رشته سه بیتی $A = a_۱a_۲a_۳$ را طلایی گوییم، اگر با شروع از یکی از اعضای مجموعه $\{۰۰, ۰۱, ۱۰, ۱۱\}$ و استفاده مکرر از دستگاه بازپرور بتوان به رشته‌ای مانند $B = b_۱b_۲\cdots b_m$رسید که رشته‌ی A زیررشته آن باشد. رشته‌ی A زیررشته B است، اگر اندیسی مانند i وجود داشته باشد که $i \leq m - ۲$ و $b_i = a_۱$، $b_{i+۱} = a_۲$ و $b_{i+۲} = a_۳$. برای مثال رشته ۱۰۰ طلایی است چرا که با شروع از ۱۰ و یک بار استفاده از دستگاه به رشته ۱۰۰۱ می‌رسیم که رشته ۱۰۰ زیررشته‌ی آن است. چند تا از رشته‌های مجموعه‌ی $\{۱۰۱, ۰۱۰, ۰۰۰, ۱۱۱\}$ طلایی هستند؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۰　　ب) ۱　　ج) ۲　　د) ۳　　هـ) ۴

۵) امروز تولد حسام است. پدر حسام برنامه زیر را نوشته و آن را به حسام داده است:

۱. جایگشت $\langle a_1, a_2, \cdots, a_{10} \rangle$ از اعداد ۱ تا ۱۰ را از ورودی بگیر.
۲. مقدار S را برابر صفر قرار بده.
۳. برای i از ۱ تا ۸ کارهای زیر را انجام بده.
  ۱.۳. مقدار C را برابر a_i قرار بده.
  ۲.۳. در صورتی‌که مقدار a_{i+1} از C بیشتر است، مقدار C را برابر a_{i+1} قرار بده.
  ۳.۳. در صورتی‌که مقدار a_{i+2} از C بیشتر است، مقدار C را برابر a_{i+2} قرار بده.
  ۴.۳. مقدار C را به مقدار کنونی S اضافه کن و حاصل را در همان S بریز.
۴. مقدار S را به‌عنوان خروجی برگردان.

پدر حسام به وی گفته است که تنها یک بار می‌تواند یک جایگشت از اعداد ۱ تا ۱۰ را به این برنامه بدهد و خروجی هر چند شد، حسام آن مقدار سکه از پدرش جایزه می‌گیرد. برای مثال اگر حسام جایگشت ⟨۵, ۴, ۳, ۲, ۱, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰⟩ را به‌عنوان ورودی به این برنامه بدهد، پدرش به او ۵۲ سکه به‌عنوان کادوی تولد می‌دهد. حداکثر تعداد سکه‌هایی که حسام می‌تواند با دادن بهترین ورودی از پدرش بگیرد چند تاست؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۶۴ ب) ۶۸ ج) ۷۳ د) ۸۱ ه) ۸۸

۶) دنباله ⟨۱۵, ۲۲, ۸, ۷, ۴۲, ۵۲, ۴۲, ۵۲, ۱۷, ۳۳, ۲۱, ۴۳, ۸, ۴, ۱⟩ از اعداد طبیعی داده شده است. به ازای هر تعداد متوالی از این اعداد، باقیمانده‌ی مجموع آن اعداد بر ۳ را روی یک کاغذ یادداشت می‌کنیم. چند عدد صفر روی کاغذ نوشته‌ایم؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۳۳ ب) ۳۴ ج) ۳۶ د) ۳۸ ه) ۴۰

۷) افراز عدد m به n عدد طبیعی، نوشتن عدد m به شکل $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$ با شرایط زیر است:

- $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = m$
- $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$

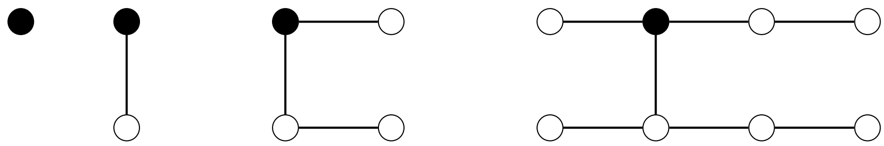
افراز $\langle a_1, a_2, \cdots, a_n \rangle$ از افراز $\langle b_1, b_2, \cdots, b_n \rangle$ کوچک‌تر است، اگر به ازای یک اندیس i که $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم:

- مقدار a_i از b_i کوچک‌تر باشد.
- برای تمام اندیس‌های j کمتر از i مقدارهای a_j و b_j برابر باشند.

تمام افرازهای عدد ۲۰ به ۷ قسمت را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. در این صورت اولین افراز ⟨۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱۴⟩ و آخرین افراز ⟨۲, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳⟩ است. اگر افراز بعد از ⟨۱, ۲, ۲, ۳, ۴, ۴, ۴⟩ افراز $\langle c_1, c_2, \cdots, c_7 \rangle$ باشد، مقدار $c_1 - c_3 + c_5 - c_7$ کدام است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۱− ب) ۲− ج) ۳− د) ۴− ه) ۵−

۸) تلسکوپ فضایی هابل عصر روز اول فروردین ماه سال ۱۳۹۰ حضور یک موجود فضایی تنها از نوع موسوم به گولولی را روی کره ماه گزارش کرده است. دانشمندان می‌دانند که این موجود هر روز ظهر یک نمونه کاملاً مشابه با خودش می‌سازد. سپس با یک طناب از جنس سیلیکات کربن (که در کره ماه یافت می‌شود)، خودش را به موجود جدید وصل می‌کند! با این وصف دانشمندان انتظار دارند که در عصر هر یک از روزهای اول تا چهارم فروردین ماه شکلی شبیه زیر از گولولی‌ها روی کره ماه مشاهده کنند. گولولی‌ها با دایره و طناب‌های سیلیکات کربن با خط مشخص شده‌اند. گولولی اوّل تیره رسم شده است.



فاصله هر گولولی از گولولی اوّلیه برابر با تعداد طناب‌های سیلیکات کربن بین کوتاه‌ترین مسیر گوگولیایی موجود بین آن دو است. در پایان روز سیزدهم فروردین مجموع فواصل تمام گولولی‌های موجود از گولولی اوّلیه چند است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۱۳۲ ب) ۱۵۶ ج) ۸۱۹۲ د) ۲۴۵۷۶ ه) ۲۶۶۲۴

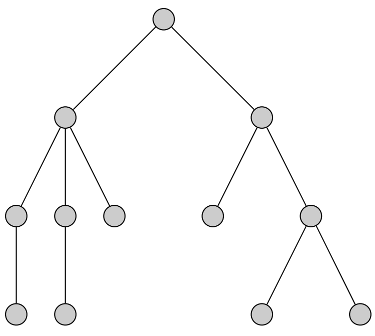
۹) ۱۰ جعبه با شماره‌های ۱ تا ۱۰ داریم که در مجموع ۳۰ توپ در آن‌ها قرار دارند. وضعیت هر لحظه جعبه‌ها را با $\langle a_1, a_2, \cdots, a_{10}\rangle$ نشان می‌دهیم که a_i تعداد توپ‌های جعبه‌ی i است. در هر گام یک اندیس i بین ۱ تا ۱۰ انتخاب می‌کنیم و در صورت وجود جعبه a_i، تمام توپ‌های جعبه i را به جعبه a_i منتقل کنیم. یک گام مجاز است اگر با انجام آن تعداد توپ‌های داخل جعبه‌ها تغییر کند. با شروع از چند تا از آرایش‌های اولیه زیر می‌توان ۵۰ گام مجاز انجام داد؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

⟨۳, ۷, ۲, ۱, ۵, ۵, ۶, ۰, ۰, ۱⟩ ⟨۶, ۵, ۲, ۳, ۱, ۱, ۴, ۰, ۰, ۸⟩

⟨۱, ۱, ۲, ۳, ۴, ۱, ۵, ۴, ۴, ۵⟩ ⟨۰, ۲, ۳, ۲, ۳, ۴, ۶, ۵, ۳, ۲⟩

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

۱۰) گراف G در شکل داده شده است. هدف این است که از یک رأس دلخواه شروع به حرکت کنیم و تمام رأس‌ها را حداقل یک بار ملاقات کنیم. در هر گام می‌توان از رأس فعلی به یکی از رئوس مجاور آن رفت. حداقل چند گام برای دستیابی به هدف مورد نظر لازم است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)



الف) ۱۴ ب) ۱۵ ج) ۱۶ د) ۱۷ ه) ۱۸

۱۱) خیکوله می‌خواهد یک دستگاه خودپرداز بسازد. برای این کار او ۵ ماشین پرداخت کننده با شماره‌های ۱ تا ۵ خریده است. ماشین i اُم یک منبع ذخیره‌ی سکه دارد که در آن می‌توان به تعداد i سکه با ارزش یکسان گذاشت. روی ماشین i اُم تعداد i دکمه با شماره‌های ۱ تا i وجود دارد. با زدن دکمه‌ی شماره j یک ماشین، آن ماشین j سکه از منبعش می‌دهد.

خیکوله می‌تواند سکه با هر ارزشی بسازد. او می‌تواند روی هر ماشین به تعداد دلخواه سکه بگذارد با این شرط که ارزش تمام سکه‌های روی یک ماشین یکسان باشند. برای پرداخت ارزش مشخصی از سکه‌ها از هر ماشین حداکثر یک بار می‌توان استفاده کرد. برای مثال فرض کنید که در ماشین اول تا سوم سکه‌هایی با ارزش ۱ تومان و در ماشین‌های چهارم و پنجم سکه‌هایی با ارزش ۱۰ تومان داریم. در این صورت:

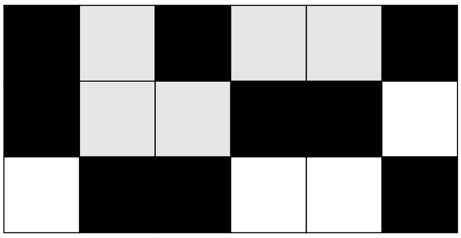
- برای پرداخت ۷ تومان روشی وجود ندارد.
- برای پرداخت ۱۳ تومان می‌توان دکمه‌ی ۳ از ماشین سوم و دکمه‌ی ۱ از ماشین چهارم را فشار داد.

فرض کنید S کوچکترین عدد طبیعی باشد که با استفاده از دستگاه خودپرداز خیکوله، روشی برای پرداخت آن وجود ندارد. خیکوله می‌خواهد ارزش سکه‌های هر یک از ماشین‌های پرداخت کننده را طوری تعیین کند که مقدار S بیشینه شود. بیشینه مقدار S چند است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۶۴ ب) ۱۲۰ ج) ۱۲۸ د) ۷۲۰ هـ) ۱۰۲۴

A_1	A_2	D_1	D_2	G_1	G_2
B_1	B_2	E_1	E_2	H_1	H_2
C_1	C_2	F_1	F_2	I_1	I_2

۱۲) جدول مقابل شامل ۹ زوج خانه می‌باشد که با حروف مشابه (به‌عنوان مثال A_1 و A_2) مشخص شده‌اند. از هر زوج خانه دقیقاً یکی را سیاه می‌کنیم تا در پایان ۹ خانه از ۱۸ خانه سیاه باشند.



از بالای جدول یک جریان آب به سمت پایین سرازیر می‌شود. می‌دانیم آب هیچ‌گاه سر بالا نمی‌رود. در حقیقت آب از هر بلوک سفید به تمام بلوک‌های سفید مجاورش (که حداقل یک ضلع مجاور دارند و بالای بلوک فعلی نیستند) جریان می‌یابد. به چند طریق می‌توانیم رنگ‌آمیزی را انجام دهیم که آب به پایین جدول نرسد؟ یکی از این روش‌ها و هم‌چنین سطح دسترسی یافته توسط آب در شکل مقابل نمایش داده شده است. (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۱۹۲ ب) ۱۸۴ ج) ۲۱۶ د) ۲۰۲ هـ) ۲۰۴

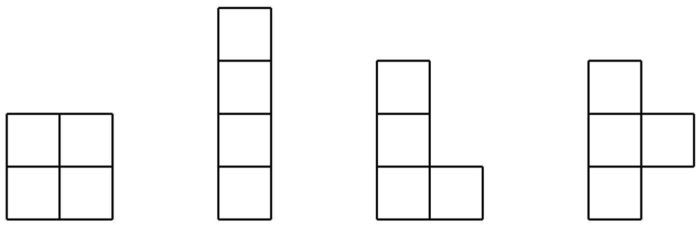
۱۳) ۵۰ نقطه روی یک خط قرار دارند. می‌خواهیم هر نقطه را با یکی از رنگ‌های ۱ تا k طوری رنگ کنیم که به ازای هر تعداد نقطه متوالی دلخواه، حداقل یک رنگ وجود داشته باشد که دقیقاً یک بار در بین این نقاط ظاهر شده است. حداقل مقدار k چند است؟ (۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ هـ) ۹

۱۴) یک جدول ۴ × ۴ داریم. مرتضی و مصطفی یکی در میان و با شروع از مرتضی خانه‌های جدول را علامت می زنند. مرتضی در نوبت خود در یک خانه خالی از جدول X قرار می‌دهد و مصطفی در نوبت خود در یک خانه خالی از جدول O قرار می‌دهد. مرتضی و مصطفی با هم چهار بازی مختلف انجام می‌دهند. بازی i برای $۱ \leq i \leq ۴$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

- بازی i: مرتضی می‌خواهد شکل i و یا شکل‌های مشابه، حاصل از دوران و تقارن این شکل را با X بسازد و مصطفی می‌خواهد جلوی او را بگیرد.

در چند بازی مرتضی برنده می‌شود؟ (۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)



شکل ۱   شکل ۲   شکل ۳   شکل ۴

الف) ۰   ب) ۱   ج) ۲   د) ۳   هـ) ۴

۱۵) برنامه زیر را در نظر بگیرید:

۱. مقدار X را از ورودی بگیر.
۲. مقدار S را برابر صفر قرار بده.
۳. مقدار C را برابر صفر قرار بده.
۴. مقدار Y را برابر مقدار X قرار بده.
۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم Y بر دو را در B و خارج قسمت آن را در خود Y بریز.
۶. مقدار S را برابر با $S + (C + ۱) \times B$ قرار بده.
۷. مقدار C را برابر با $C - ۱$ قرار بده.
۸. اگر Y بزرگتر از صفر بود به خط ۵ برو.
۹. اگر S برابر با X بود مقدار S را به‌عنوان خروجی برگردان و به برنامه خاتمه بده.
۱۰. مقدار X را برابر با S قرار بده.
۱۱. به خط ۲ برو.

به ازای چند تا از اعضای مجموعه‌ی $\{۱۳۹۰, ۱۳۹۱, ۱۳۹۲, \ldots, ۱۴۸۸\}$ اگر آن عدد را به‌عنوان ورودی به این برنامه بدهیم، برنامه خاتمه یافته و خروجی برابر با ۱ خواهد بود؟

(۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۰   ب) ۹۹   ج) ۲۵   د) ۵۰   هـ) ۳۳

۱۶) هشت وزنه در اختیار داریم که وزن هیچ یک از آن‌ها را نمی‌دانیم. در عوض می‌دانیم که وزن هریک از وزنه‌ها یکی از اعضای مجموعه‌ی $\{۱۰, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۸, ۳۰, ۴۵\}$ است و هم‌چنین وزن هیچ دو وزنه‌ای برابر نیست. یک ترازوی دو کفه‌ای در اختیار داریم. در هر بار استفاده از آن می‌توانیم تعدادی وزنه را در کفه‌ی سمت چپ و تعدادی وزنه را در کفه‌ی سمت راست ترازو قرار دهیم و وزن آن‌ها را با هم مقایسه کنیم. دقت کنید که در هر مقایسه میزان سنگین‌تر بودن یک کفه را نمی‌توان فهمید. بلکه در هر مقایسه فقط می‌توان فهمید که وزنه‌های موجود در کدام کفه سنگین‌تر است و یا وزنه‌ها موجود در دو کفه وزن یکسان دارند. حداقل چند بار از ترازو استفاده کنیم، تا وزن حداقل یکی از وزنه‌ها را بدست آوریم؟
(۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۷

۱۷) دستگاه «عجیب» به عنوان ورودی زوج مرتب $\langle a, b\rangle$ را می‌گیرد و یکی از شش زوج مرتب $\langle a, a+b\rangle$، $\langle a, ۲a\rangle$، $\langle a, ۲b\rangle$، $\langle a+b, b\rangle$، $\langle ۲a, b\rangle$ یا $\langle ۲b, b\rangle$ را تولید می‌کند. زوج مرتب $\langle x, y\rangle$ را قابل تولید گوییم اگر با شروع از $\langle ۱, ۱\rangle$ و به تعداد دلخواه استفاده از دستگاه، بتوان زوج مرتب $\langle x, y\rangle$ را تولید کرد. چند زوج مرتب $\langle x, x\rangle$ با $۱ \leq x \leq ۱۰۰$ قابل تولید هستند؟ (۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۹۹ ب) ۵۱ ج) ۴۲ د) ۱۴ ه) ۷

۱۸) امروز تولد آیدا، یکی از ساکنین کشور سه‌سوسا است. در این کشور عدد سه بسیار باارزش تلقی می‌شود. طبق یک رسم دوستانه قدیمی، دوستانش قرارست برای او بسته‌های حاوی کلوچه کادو بیاورند. میدانیم شکل ظاهری کلوچه‌های موجود در یک بسته کاملاً شبیه هم است اما وزن آن‌ها ممکن‌ست با هم متفاوت باشند. هم‌چنین وزن کلوچه‌ها یک عدد طبیعی است.

یک آئین قدیمی می‌گوید که اگر فرد A به‌عنوان کادوی تولد برای فرد B یک بسته حاوی k عدد کلوچه بیاورد و مجموع وزن این k کلوچه مضربی از ۳ گرم باشد، آنگاه A یک «دوست واقعی» B است! برای تشخیص دوستان واقعی، آیدا به بازار می‌رود تا ترازو بخرد. او متوجه می‌شود که ترازوهای موجود در بازار همگی یک کفه‌ای هستند و به‌جای عقربه یا صفحه دیجیتال، تنها فقط یک چراغ دارند که در صورتی که مجموع وزن اشیاء روی کفه ترازو مضربی از ۳ گرم باشد، چراغ روشن می شود! علاوه بر این، ترازوهای موجود دارای محدودیت جالبی در حجم کفه هستند. به این معنی که در بازار ترازوهای مدل $W_۱$، مدل $W_۲$، مدل $W_۳$ و مدل $W_۴$ وجود دارند که ترازوی مدل W_i تنها در صورتی کار می‌کند که روی آن دقیقاً i تا کلوچه (و نه کمتر یا بیشتر) قرار بگیرد.

متأسفانه آیدا نمی‌داند که هر یک از دوستانش ممکن‌ست چند تا کلوچه برایش بیاورند. و برای همین باید با خرید یک یا چند ترازو و چندین بار استفاده از آن‌ها، بتواند مضرب ۳ بودن مجموع هر بسته کلوچه را تشخیص دهد. یک مجموعه از ترازوها را کامل می‌گوییم اگر بتوانیم با کمک ترازوهای موجود در آن مجموعه، برای هر بسته کلوچه حاوی بیش از ۳ کلوچه، با کمک آن ترازوها و استفاده از قدرت تحلیل و استدلال تشخیص بدهیم که مجموع وزن این بسته کلوچه بر ۳ بخش‌پذیر است یا نه؟ از بین مجموعه‌های $\{W_۱, W_۲\}$، $\{W_۱, W_۳\}$، $\{W_۲, W_۳\}$ و $\{W_۱, W_۴\}$ چند تایشان کامل هستند؟

(۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴