مرحله ی اول بیست و یکمین المپیاد ریاضی ایران

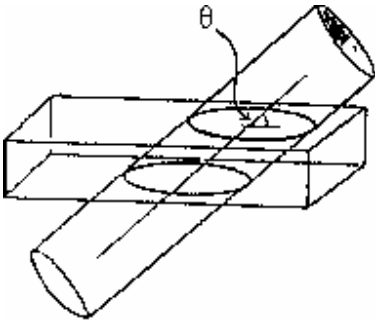
۱۸ بهمن ماه ۱۳۸۱

---

۱) اگر از یک عدد سه رقمی کم تر از ۶۰۰ مجموع ارقامش را کم کنیم، چند عدد مختلف ممکن است به دست آید؟

الف) ۴۸ ب) ۵۰ ج) ۵۳ د) ۵۵ ه) ۵۶

۲) کیکی به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۵۰×۲۰×۱۰ داریم. به کودکی اجازه داده شده به وسیله ی یک استوانه که دو سر آن باز است، از کیک قطعه ای جدا کند، به این ترتیب که استوانه را با یکی از زوایای 30^o، 45^o، 60^o، 90^o نسبت به سطح بزرگ وارد آن کرده و مقدار کیکی را که درون استوانه قرار می گیرد برای خود بردارد. در کدام حالت بیش ترین مقدار کیک را به دست می آورد؟



الف) $\theta=30^o$ ب) $\theta=45^o$ ج) $\theta=60^o$

د) $\theta=90^o$ ه) در همه ی موارد، مقدار ثابتی کیک به دست می آید.

۳) در یک چهاروجهی چهار مثلث داریم که هر کدام سه زاویه دارند. اگر از این دوازده زاویه n تای آن ها منفرجه باشند آن گاه

الف) n نمی تواند ۱ باشد. ب) n نمی تواند ۲ باشد.

ج) n نمی تواند ۳ باشد. د) n نمی تواند ۴ باشد. ه) هیچ کدام

۴) در یک ده، صد خانه ساخته شده است. هر ۱۰ خانه ای را که در نظر بگیریم، حداقل ۳ آنتن روی بام هایشان هست (ممکن است روی یک بام هیچ یا چند آنتن هم باشد.) هر سه تا آنتنی را که در نظر بگیریم، حداقل دو کلاغ روی آن ها نشسته است ممکن است روی یک آنتن چند کلاغ هم باشد). این ده حداقل چند کلاغ دارد؟

الف) ۱۰ ب) ۹۲ ج) ۹۳ د) ۹۸ ه) ۹۹

۵) در هر مرحله ۴ خانه از جدول روبرو انتخاب می کنیم به طوری که از هیچ سطر یا ستونی ۲ خانه انتخاب نشده باشد. عدد های هر ۴ خانه را یک واحد اضافه یا از هر یک، یک واحد کم می کنیم. با این روش به کدام یک از جدول های زیر می توان رسید؟

۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰
۰	۰	۰	۰

الف)

۳	-۶	۰	-۲۱
۲۷	۲۷	۱۰	-۶
۴	۷	۷	۲۰
۴	۱۰	۲۳	۳

ب)

۱۳	۰	۰	۲۰
۷	۴	۱۷	۰
۱۱	۱۰	۵	۱۰
۱۳	۱۱	۶	۰

ج)

۱	۲	۳	۴
۲	۱	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۲	۴	۳	۱

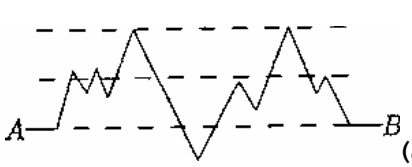
د)

۲۱	۲	۱۷	۱۰
۲	۱۴	۱۷	۱۷
۱۰	۲۴	۱۳	۳
۱۷	۱۰	۳	۲۰

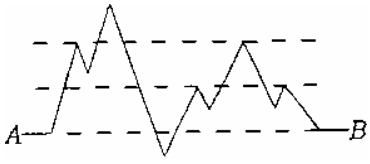
ه)

۱۵	۳	۱۷	۱۵
۶	۱۳	۱۳	۱۶
۸	۱۵	۱۳	۱۴
۲۱	۱۹	۵	۳

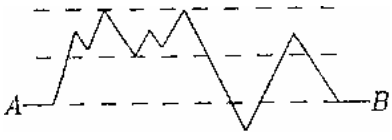
۶) شیرین در نقطه ی A و فرهاد در نقطه ی B ایستاده است. آن ها می خواهند از کوه ها و دره ها عبور کنند و به هم برسند، ولی هیچ کدام از آن ها نمی خواهند بالاتر از دیگری قرار گیرند. به همین منظور طوری حرکت می کنند که در هر لحظه هم ارتفاع باشند. در کدام یک از کوهستان های زیر فرهاد و شیرین به هم می رسند؟



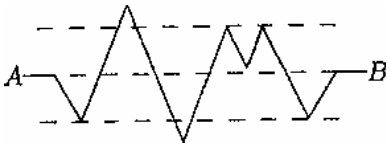
الف)



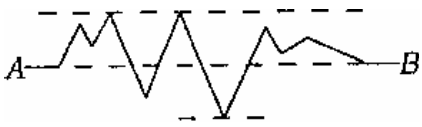
ب)



ج)



د)



ه)

۷) هر مولکول از تعدادی اتم تشکیل شده است. بین هر دو اتم یک ملکول، تعدادی پیوند و جود دارد. این تعداد می توانـد ۰، ۱، ۲ و یا حتی بیشتر باشد. تعداد پیوند های بین اتم های x و y در مولکول هـای مختلـف عـددی ثابـت و وابـسته بـه x و y اسـت. می دانیم:

مولکول تشکیل شده از اتم های a، b و c دارای ۵ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم های a، b و d دارای ۷ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم های a، c و d دارای ۳ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم های b، c و d دارای ۵ پیوند است.

مولکول تشکیل شده از اتم های a، b، c، d چند پیوند دارد؟

الف) ۶ ب) ۱۰ ج) ۱۲ د) ۱۵ ه) مساله جواب منحصر به فرد ندارد.

۸) مولکول تشکیل شده توسط ۱۰ اتم x_1، x_2، ... و x_{10} را در نظر بگیرید. می دانیم این مولکول ۴۳ پیوند دارد و در ضمن بین هر دو اتم از این مولکول حداکثر یک پیوند موجود است. می گوییم سه اتم x_i، x_j و x_k تشکیل یک مثلث می دهند، هر گاه بین هـر دو تا از آن ها پیوند موجود باشد. فرض کنید تعداد مثلث های این مولکول برابر t باشد. کدام گزینه صحیح است؟

الف) $۹۶\le t\le ۹۸$ ب) $۹۹\le t\le ۱۰۲$ ج) $۱۰۳\le t\le ۱۰۵$

د) $۱۰۶\le t\le ۱۰۸$ ه) $۱۰۹\le t\le ۱۱۲$

۹) به چند طریق می توان در هر یک از خانه های یک جدول ۳×۳ یکی از اعداد ۰، ۱ و ۲ را نوشت طوری که مجموع اعـداد در هر سطر و هر ستون برابر ۲ شود؟

الف) ۱۵ ب) ۱۸ ج) ۲۱ د) ۲۴ ه) ۲۷

۱۰) فرض کنید x_1، x_2، x_3 و x_4 اعدادی صحیح و نامنفی باشند، به طوری که مجموع آن ها برابر ۱۶ باشد و

$$A=(2x_1+x_2+2x_3+3x_4)(3x_1+2x_2+x_3+2x_4)(2x_1+3x_2+2x_3+x_4)(x_1+2x_2+3x_3+2x_4)$$

اگر بیش ترین مقدار A برابر M باشد در چند حالت داریم، A=M؟

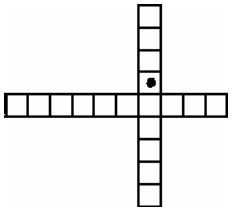
الف) تعداد حالات تساوی ۱ است. **ب) تعداد حالات تساوی ۶ است.**

ج) تعداد حالات تساوی ۹ است. **د) تعداد حالات تساوی نامتناهی است.**

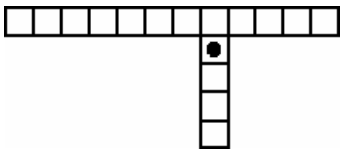
ه) A بی کران است و بیش ترین مقدار ندارد.

۱۱) در یک بازی دو نفره بازیکنان می خواهند به خانه ای که در آن شکلات قرار دارد برسند. قانون این بازی این است که هـر بازیکن در نوبت خود خانه ای از جدول را که سه ضلع آزاد دارد، بر می دارد. در کدام یک از زمین های بازی زیر بـازیکن دوم می تواند همیشه برنده باشد؟

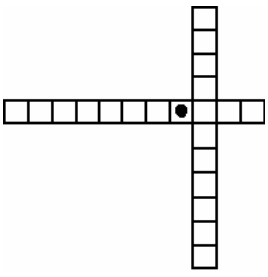
الف)



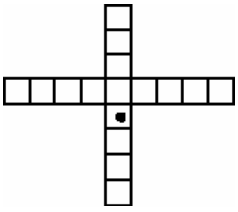
ب)



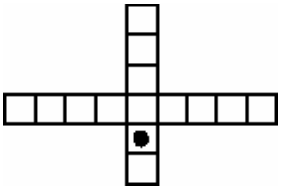
ج)



د)



ه)



۱۲) فرض کنید A یک مجموعه ی ۱۰ عضوی و B زیرمجموعه ای نا تهی از A باشد. تعداد زیرمجموعه هایی (مانند C) از مجموعه ی A که $B \cap C$ تعداد فردی عضو داشته باشد برابر است با:

الف) ۵۹۶ ب) ۵۱۲ ج) ۴۶۴ د) ۳۴۸ ه) بستگی به تعداد اعضای B دارد.

۱۳) زیرمجموعه ی A از اعداد طبیعی را ضعیف می نامیم، هر گاه مجموع هیچ دو عضوی از A بر عضوی از A بخش پذیر نباشد. در ضمن، یک مجموعه را بزرگ می نامیم، هر گاه هیچ زیرمجموعه ی ضعیف دیگری شامل آن نباشد. کدام گزینه نادرست است؟

الف) نامتناهی مجموعه ی ضعیف نامتناهی داریم.

ب) مجموعه ی ضعیف نامتناهی وجود دارد که بزرگ است.

ج) نامتناهی مجموعه ی ضعیف متناهی داریم که بزرگ هستند.

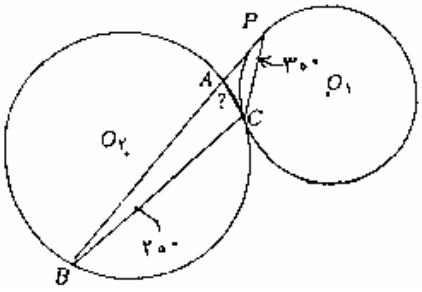
د) مجموعه ی ضعیف نامتناهی وجود دارد که همه ی اعضای آن بر ۱۳۸۱ بخش پذیر اند.

ه) مجموعه ای ضعیف وجود دارد که از هر سه عدد متوالی حداقل یکی را دارا است.

۱۴) به چند طریق می توان در هر یک از خانه های یک جدول ۴×۴ یکی از دو عدد ۰ و ۱ را نوشت به طوری که مجموع اعداد در هر سطر و در هر ستون برابر ۲ شود؟

الف) ۸۳ ب) ۴۴ ج) ۵۴ د) ۹۰ ه) ۷۸

۱۵) در شکل مقابل BP بر دایره ی (O_1) مماس است. داریم: $APC=30^o$ و $CBA=20^o$. همچنین دوایر (O_1) و (O_2) بر هم مماس اند. اندازه ی زاویه ی BAC کدام است؟



الف) 80^o ب) 130^o ج) 60^o د) 50^o ه) 140^o

۱۶) در چهارضلعی محاطی ABCD داریم: $AB=۳,BC=DA=۲,CD=۴$. طول قطر BD چقدر است؟

الف) ۵ ب) $\frac{۷}{۲}$ ج) $۲\sqrt{۲}$ د) $\frac{۱۷}{۴}$ ه) ۴

۱۷) فرض کنید n عددی طبیعی باشد، مقسوم علیه d از n را خوب می گوییم، اگر $(d,\frac{n}{d})=۱$. فرض کنید f(n) نماینده ی مجموع مقسوم علیه های خوب n باشد و S مجموعه ی اعداد طبیعی مانند m باشد که $f(m)-۲$ مضرب ۴ است و $۱\leq m\leq ۱۰۰۰$. کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

الف) عضوی از S وجود دارد که بر ۳۰ بخش پذیر است.

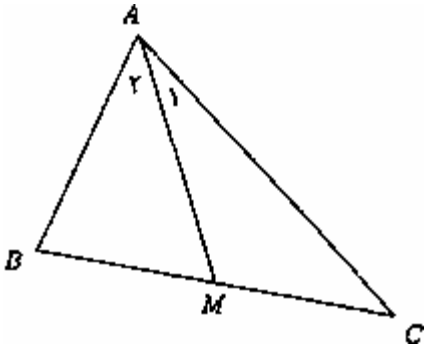
ب) عضوی از S به شکل $۴k+۳$ است.

ج) هر عضو S حداکثر دو عامل اول دارد.

د) عضوی از S وجود دارد که تعداد عوامل اول آن ۴ است.

ه) هیچ کدام.

۱۸) در شکل روبرو زاویه ی $A_۲$ دو برابر زاویه ی $A_۱$ است و داریم: $AC=\sqrt{۳}$ و $AB=۱$ و AM میانه ی BC است. طول BC کدام است؟



الف) $\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲}$ ب) $\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$ ج) ۲

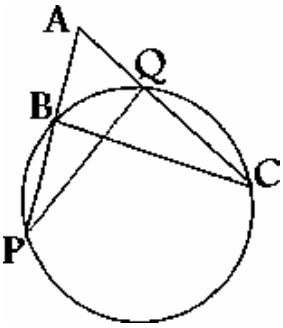
د) $\sqrt{۳}$ ه) $\frac{۳}{۲}$

۱۹) در مثلث ABC، زاویه ی $A=۱۲۰^{o}$ و مجموع دو ضلع AB و AC برابر ۱۰ است. در مورد ضلع BC چه می توان گفت؟

الف) $BC<۹$ ب) $BC \geq ۵\sqrt{۳}$ ج) $۵\leq BC\leq ۹$

د) $۵\sqrt{۳} \leq BC \leq ۹$ ه) $\frac{۱۱}{۲} \leq BC \leq \frac{۱۷}{۲}$

۲۰) در مثلث ABC دوایری را در نظر بگیرید که از رئوس B و C می گذرند و AB و AC یا امتداد آن ها را در نقاطی مثل P و Q قطع می کنند. مکان هندسی وسط پاره خط هایی مانند PQ کدام می باشد؟



الف) عمود منصف BC.

ب) خطی که از A می گذرد.

ج) قسمتی از دایره ای که از B و C می گذرد.

د) دایره ای که از A می گذرد.

ه) هیچ کدام

۲۱) معادله ی زیر در اعداد صحیح چند جواب دارد؟

$x^{۲}+y^{۵}=۱۳۸۱+z^{۲}$

الف) صفر ب) ۲ ج) ۴ د) ۸ ه) بی نهایت

۲۲) بزرگ ترین مربعی که بتواند در مثلثی به مساحت یک محاط شود چه مساحتی دارد؟

الف) $\frac{۱}{۴}$ ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۲}$ د) $\frac{۲}{۳}$ ه) $\frac{۳}{۴}$

۲۳) فرض کنید f و g دو تابع از $\mathbb{N}$ به $\mathbb{R}$ باشند. می گوییم $f \ll g$ اگر $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد که برای هر $n>N$، $f(n)<g(n)$. اگر:

$$f_1(n) = (10^n)! \qquad f_2(n) = 2^{n!} \qquad f_3(n) = \sqrt[n]{(n!)!}$$

کدام گزینه صحیح است؟

الف) $f_1 \ll f_2 \ll f_3$ ب) $f_2 \ll f_1 \ll f_3$ ج) $f_3 \ll f_2 \ll f_1$

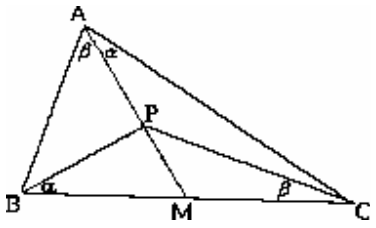
د) $f_1 \ll f_3 \ll f_2$ ه) $f_2 \ll f_3 \ll f_1$

۲۴) در مثلث ABC، AM میانه است. نقطه ی P روی AM چنان قرار گرفته است که

$PAC=PBC=\alpha$

$PAB=PCB=\beta$

اگر $\alpha+\beta=80^\circ$ زاویه ی CPA چقدر است؟

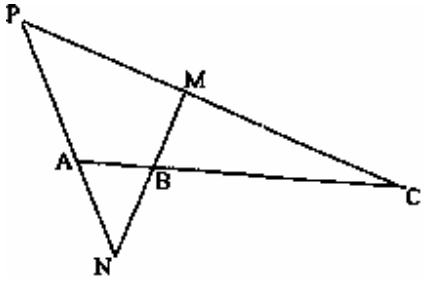


الف) 130° ب) 120° ج) 140°

د) $120^\circ<CPA<130^\circ$ ه) تمام مقادیر بین 120° و 140° می تواند باشد.

۲۵) در شکل روبرو BM=BN. اگر داشته باشیم

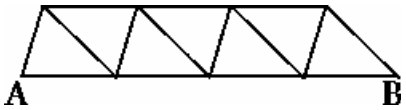
$$\frac{S_{BMC}}{S_{APC}} = \frac{4}{49}$$



مطلوب است مقدار $\frac{AB}{AC}$.

الف) $\frac{4}{49}$ ب) $\frac{2}{7}$ ج) $\frac{14}{15}$ د) $\frac{3}{7}$ ه) $\frac{2}{3}$

۲۶) در شکل زیر به چند طریق می توانیم از نقطه ی A به نقطه ی B برویم به طوری که از هیچ نقطه ای دو بار عبور نکنیم؟



الف) ۸۱ ب) ۷۲ ج) ۶۱ د) ۵۲ ه) ۴۴

۲۷) داخل یک نیم کره و صفحه ی گذرنده از دایره ی عظیمه ی آن را آینه کرده ایم. پرتوی را در نظر بگیرید که از نقطه ای روی نیم کره به سوی درون آن تابیده می شود. فرض کنید اگر پرتو به مرز دایره ی عظیمه برخورد کند روی همان مسیر برگردد. (توجه کنید که بردار عمود بر سطح، پرتو تابش و بازتابش همواره در یک صفحه اند و هر پرتو که به نیم کره برخورد می کند چنان منعکس می شود که نیمساز بین پرتو تابع و بازتابش از مرکز کره بگذرد.

الف) مسیر این پرتو به مرز دایره ی عظیمه میل می کند.

ب) مسیر این پرتو به هر نقطه روی نیم کره و دایره ی عظیمه ی آن به دلخواه نزدیک می شود.

ج) مسیر این پرتو همواره متناوب است.

د) مسیر این پرتو به ازای نامتناهی جهت تابش، متناوب است.

ه) مسیر این پرتو تنها به ازای متناهی جهت تابش، متناوب است.

۲۸) خرج نگهداری فیل خیلی زیاد است به همین دلیل رییس باغ وحش شهر خسیس ها تصمیم می گیرد اگر دو فیل هم شکل داشته باشد، یکی از آن ها را بفروشد. به نظر وی دو فیل وقتی هم شکل اند که در مقایسه ی طول خرطوم و طول دم آن ها با هر فیل دیگری که در باغ وحش وجود دارد، هر دو به نتایج یکسانی برسند. یعنی برای مثال، اگر با فیل خاصی مقایسه شوند طول خرطوم هر دو از خرطوم آن کوتاه تر باشد و طول دم هر دو از طول دم آن بلند تر باشد. پس از عملیات فروش، وقتی دیگر هیچ دو فیلی هم شکل نیستند کدام یک از گزینه ها صحیح است؟

(توجه کنید که طول خرطوم یا دم هیچ دو فیلی برابر نیست.)

الف) ممکن است ۳ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۴ فیل باقی بماند.

ب) ممکن است ۳ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۵ فیل باقی بماند.

ج) ممکن است ۴ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۳ فیل باقی بماند.

د) ممکن است ۵ فیل باقی بماند ولی ممکن نیست ۴ فیل باقی بماند.

ه) ممکن است هر تعداد بیش تر یا مساوی ۳ فیل باقی بماند.

۲۹) فرض کنید $p(x)=x^2+a$ که a یک عدد حقیقی و ثابت است. معادله ی $p(p(x))=x$ را در نظر بگیرید.

الف) این معادله چهار جواب دارد اگر و تنها اگر $a<\frac{-3}{4}$.

ب) این معادله همواره جواب دارد.

ج) به ازای $a=\frac{1}{4}$ این معادله دو جواب دارد.

د) به ازای $a>0$ این معادله جواب ندارد.

ه) الف و ب

۳۰) دنباله ی $\{x_n\}$ را به این صورت تعریف می کنیم $x_0=t$ و به ازای $n\geq 0$، $x_{n+1}=2x_n^2-1$. چند $t\in[-1,1]$ وجود دارد که $x_{11}=1$؟ (راهنمایی: $\cos 2\theta+1=2\cos^2\theta$)

الف) چنین t ای وجود ندارد.

ب) تنها یک t با این خاصیت وجود دارد.

ج) تعداد چنین t هایی بین صد و هزار است.

د) بیش از هزار t با این خاصیت وجود دارد.

ه) نامتناهی t با این خاصیت وجود دارد.