

## مسأله های مرحله ی اول پنجمین دوره ی المپیاد ریاضی

دانش آموزان کشور، بهمن ماه ۱۳۶۶

۱. در مثلث  $ABC$  میانه  $AM$  را رسم کنید و نقطه  $I$  وسط آن را بنامید. پاره خط  $BI$  را ادامه دهید تا ضلع  $AC$  را در نقطه  $D$  قطع کند. ثابت کنید

$$S_{ABC} = 4S_{AID}$$

(منظور از  $S_{ABC}$  مساحت مثلث  $ABC$  است).

۲. ثابت کنید حاصلجمع هیچ  $k$  عدد صحیح متوالی و مثبت را نمی توان به صورت  $2^n$  نوشت. ( $k$  و  $n$  اعداد صحیح و مثبت و  $k \neq 1$  است)

۳. همه ی چندجمله ای های  $P(x)$  را طوری تعیین کنید که اتحاد زیر برقرار باشد.

$$xP(x-1) = (x-1)^2P(x)$$

۴. مثلث  $ABC$  مفروض است.

الف) ثابت کنید عده ی بی شماری مثلث متساوی الاضلاع می توان رسم کرد به طوری که مثلث  $ABC$  در آن ها محاط باشد (یعنی هر یک از رئوس  $A$ ،  $B$  و  $C$  روی یکی از اضلاع مثلث ساخته شده قرار گیرد).

ب) از میان مثلث های متساوی الاضلاع ساخته شده مثلثی را تعیین کنید که محیط و مساحت آن ماکسیمم باشد.

۵. چندجمله ای ناصفر  $f(x)$  را چنان تعیین کنید که رابطه ی زیر برقرار باشد:

$$f(2x) = f'(x)f''(x)$$

۶. اعداد صحیح و مثبت  $a_1, a_2, \dots, a_n$  را طوری تعیین کنید که

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1366$$

و حاصلضرب  $a_1 a_2 \dots a_n$  ماکزیمم باشد.