مسأله های مرحله ی اول ششمین دوره ی المپیاد ریاضی
دانش آموزان کشور، بهمن ماه ۱۳۶۷

۱. اگر α ریشه ی معادله ی $x^3+x^2+2x-1=0$ باشد آن گاه دو ریشه ی دیگر معادله را به صورت کثیرالجمله ای [چندجمله ای] با ضرایب گویا بر حسب α به دست آورید.

۲. در مثلث غیر مشخص ABC که هر سه زاویه ی آن حاده هستند ارتفاعات AD، BE و CF را امتداد می دهیم تا دایره ی محیطی مثلث را به ترتیب در P، Q و R قطع کنند. اگر h طول بزرگترین ارتفاع و s طول کوچکترین پاره خط های AP، BQ و CR باشد ثابت کنید

$$\frac{h}{s}>\frac{1367}{1989}$$

۳. دو تابع حقیقی f و g بر [روی] $\mathbb{R}$ را وابسته گوییم هر گاه تابع حقیقی دو سویی h (یک به یک و پوشا) [روی $\mathbb{R}$] وجود داشته باشد به طوری که hof=goh (fog ترکیب توابع f و g است).

الف) نشان دهید اگر f و g وابسته و g و φ نیز وابسته باشند آن گاه f و φ نیز وابسته اند.

ب) مطلوب است شرط لازم و کافی بر حسب a و b برای اینکه دو تابع $f(x)=x^2$ و $g(x)=x^2-ax+b$ وابسته باشند.

۴. معادله ی سیاله ی زیر را حل کنید (m، n، p و q ارقام هستند):

$$(m-9)^3\times m!+(n-8)^3\times n!+50\times p!+39\times q!=\sqrt{mnpq}$$

۵. فرض کنید تابع f بر [a,b] ($0<a<b$) تعریف شده و در رابطه ی

$$\forall x,y\in[a,b], x\neq y \Rightarrow |f(x)-f(y)|<|x-y|$$

صد کند؛ و داریم $f(a)=f(b)=0$. ثابت کنید

$$\forall x,y\in[a,b],\ |f(x)-f(y)|<\frac{a+b}{2}$$

۶. در متوازی الاضلاع ABCD که AC>BD، از رأس C عمود های CE و CF را به ترتیب بر AB و AD رسم می کنیم. ثابت کنید

$$AB.AE+AD.AF=AC^2$$