

مرحله ی دوم هفدهمین المپیاد ریاضی دانش آموزان ایران

نوبت اول: ۱۵ اردیبهشت ماه ۱۳۷۸

ساعت شروع: ۱۴، مدت آزمون: ۴ ساعت، هر سؤال ۷ نمره دارد.

مسئله ی ۱. آیا عدد صحیح و مثبتی که توانی از ۲ باشد وجود دارد که با جابجایی ارقامش توان دیگری از ۲ حاصل شود؟ چرا؟

مسئله ی ۲. مثلث ABC را با فرض $B > 45^\circ$ و $C > 45^\circ$ در نظر می گیریم. مثلث های قائم الزاویه ی متساوی الساقین CAM و BAN را در خارج ABC طوری می سازیم که $\angle CAM = \angle BAN = 90^\circ$ ، و در داخل ABC مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین BPC را طوری می سازیم که $\angle P = 90^\circ$. ثابت کنید که مثلث MPN نیز یک مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین است.

مسئله ی ۳. یک زمین مربع شکل به شبکه ی 100×100 از نقاط متساوی الفاصله تقسیم شده و تعداد 10000 عدد درخت هر کدام در یکی از نقاط این شبکه کاشته شده است. ماکزیم تعداد درخت هایی که می توانیم قطع کنیم را پیدا کنید که اگر در محل هر درخت بریده شده بی قرار بگیریم هیچ درخت بریده شده ی دیگری را نبینیم. (یعنی روی پاره خط واصل بین هر دو درخت بریده شده، درخت بریده نشده یی واقع باشد.)

« موفق باشید »

نوبت دوم: ۱۶ اردیبهشت ماه ۱۳۷۸

شروع: ساعت ۹، مدت: ۴ ساعت، هر سؤال ۷ نمره دارد.

مسئله ی ۴. مجموعه ی عدد های طبیعی m به صورت زیر

$$m = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{1378}{a_{1378}}$$

را پیدا کنید که در آن a_1, a_2, \dots و a_{1378} اعدادی صحیح و مثبت باشند.

مسئله ی ۵. مثلث ABC مفروض است. نقاط P, Q, R به ترتیب روی AB, BC, CA قرار دارند. حال نقاط A', B', C' را به ترتیب روی PR, QP, RQ طوری در نظر می گیریم که AB با $A'B'$ ، BC با $B'C'$ و CA با $C'A'$ موازی باشند.

ثابت کنید که

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\text{مساحت } PQR}{\text{مساحت } A'B'C'}$$

مسئله ی ۶. فرض کنید A_1, A_2, \dots, A_n و n نقطه ی متمایز در صفحه باشند ($n \geq 2$). همه ی پاره خط هایی که از اتصال دو به دو این نقاط به دست می آیند را در نظر می گیریم و وسط هر یک از این پاره خط ها را به رنگ قرمز، رنگ می کنیم. حداقل تعداد نقاط قرمز به دست آمده چند تاست؟

« موفق باشید »