

## مرحله ی دوم نوزدهمین المپیاد ریاضی ایران

نوبت اول: ۱۹ اردیبهشت ماه ۱۳۸۰

ساعت ۱۴ تا ساعت ۱۸

مسئله ی ۱- فرض کنید  $P$  عددی اول و  $n$  عددی طبیعی باشد به طوری که  $1+np$  یک مربع کامل است. ثابت کنید  $n+1$  را می توان به صورت مجموع  $P$  تا مربع کامل نوشت.

مسئله ی ۲- مثلث حاده الزویه  $ABC$  مفروض است. روی اضلاع آن، سه مثلث  $B'AC$ ،  $C'AB$  و  $A'BC$  را به سمت خارج می سازیم به طوری که:

$$\angle B'AC = \angle C'BA = \angle A'BC = 30^\circ$$

$$\angle B'CA = \angle C'AB = \angle A'CB = 60^\circ$$

اگر  $M$  وسط ضلع  $BC$  باشد، نشان دهید  $B'M$  بر  $A'C'$  عمود است.

مسئله ی ۳- تمام  $n$  هایی را پیدا کنید که بتوان  $n$  مربع یکسان را طوری در صفحه قرار داد که اضلاع آن ها افقی و عمودی باشد و شکل حاصل حداقل سه محور تقارن داشته باشد.

هر سؤال ۷ نمره دارد

نوبت دوم: ۲۰ اردیبهشت ماه ۱۳۸۰

ساعت ۹ تا ساعت ۱۳

مسئله ی ۴- تمام چندجمله ای های  $P$  با ضرایب حقیقی را پیدا کنید که برای هر عدد حقیقی  $x$  داشته باشیم:

$$P(2P(x)) = 2P(P(x)) + 2(P(x))^2$$

مسئله ی ۵- در مثلث  $ABC$  ( $AB > AC$ ) نیمساز های راس های  $B$  و  $C$  اضلاع مقابل را به ترتیب در  $P$  و  $Q$  قطع می کنند، هم چنین نقطه تقاطع دو نیمساز را نقطه ی  $I$  می گیریم. اگر  $IP = IQ$  باشد، زاویه ی  $A$  چند درجه است؟

مسئله ی ۶- جدولی با یک سطر و تعدادی نامتناهی خانه در نظر بگیرید، که از سمت چپ متناهی باشد (نظیر شکل زیر)

						.....
--	--	--	--	--	--	-------

در بعضی از خانه های این جدول تعدادی متناهی مهره قرار داده ایم (در یک خانه می تواند بیش از یک مهره باشد). دو عمل زیر را می توان روی مهره ها انجام داد:

(۱) اگر در دو خانه ی مجاور، در هر یک، تعدادی مهره وجود داشته باشد می توان یکی از مهره های خانه ی سمت چپ را ۲ خانه به راست برد و یک مهره از خانه سمت راست را حذف کرد.

(۲) در حالتی که در یکی از خانه های سوم به بعد بیش از یک مهره وجود داشته باشد، می توان یکی از مهره ها را یک خانه به راست و یک مهره دیگر را ۲ خانه به چپ برد.

الف) ثابت کنید با آغاز از هر حالتی، پس از تعدادی عمل به وضعیتی می رسیم که دیگر هیچ عملی قابل انجام نیست.

ب) فرض کنید در هر یک از خانه های اول تا  $n$  ام یک مهره قرار دارد. ثابت کنید با انجام اعمال ذکر شده هیچ گاه مهره ای از خانه  $(n+1)$  ام جلو تر نخواهد رفت.

هر سؤال ۷ نمره دارد