

# مرحله ی دوم بیست و یکمین المپیاد ریاضی ایران

نوبت اول: ۸ اردیبهشت ماه ۱۳۸۲

ساعت ۱۴ تا ۱۸:۳۰

(۱) عدد طبیعی  $n$  را سه لایه ای می نامیم هر گاه بتوان مجموعه ی مقسوم علیه های مثبت آن را به سه دسته طوری تقسیم کرد که مجموع اعضای هر سه دسته با هم برابر باشد.

الف) عددی سه لایه ای مثال بزنید،

ب) ثابت کنید بی نهایت عدد سه لایه ای وجود دارد.

(۲) در یک روستا  $n$  خانه وجود دارد ( $n \geq 3$ ) به طوری که همه ی آن ها روی یک خط قرار ندارند. می خواهیم یک منبع آب در این روستا احداث کنیم. برای این کار نقطه ی  $A$  مناسب تر از نقطه ی  $B$  است اگر مجموع فواصل  $A$  تا خانه ها کم تر از مجموع فواصل  $B$  تا خانه ها باشد.

(۳)  $n$  تیم والیبال دو به دو (هر دو تیم دقیقاً یک بار) با هم مسابقه داده اند. برای هر دو تیم متمایز مانند  $B, A$  دقیقاً  $t$  تیم وجود دارند که از هر دو تیم  $B, A$  باخته اند. ثابت کنید  $n = 4t + 3$ .

(توجه کنید که در والیبال تساوی وجود ندارد.)

نوبت دوم: ۱۹ دیبهشت ماه ۱۳۸۲

ساعت ۹ تا ساعت ۱۳:۳۰

(۴) برای هر سه عدد حقیقی  $x, y, z$  با شرط  $xyz = -1$ ، نامساوی زیر را اثبات کنید:

$$x^6 + y^6 + z^6 + 3(x+y+z) \geq x^2/y + x^2/z + y^2/z + y^2/x + z^2/x + z^2/y$$

(۵) زاویه  $A$  کوچکترین زاویه  $\triangle ABC$  می باشد. نقطه  $D$  روی کمان کوچکتر  $BC$  از دایره  $\triangle ABC$  واقع است.

عمود منصفهای  $AB, AC$  با خط  $AD$  به ترتیب در نقاط  $M, N$  برخورد می نمایند. نقطه  $T$  محل برخورد  $BM, CN$  است. ثابت کنید

$$BT + CT \leq 2R$$

که  $R$  شعاع دایره  $\triangle ABC$  است.

(۶) یک ربات از یک رأس  $\triangle ABC$  روی صفحه  $\triangle ABC$  شطرنجی بزرگ شروع به حرکت کرده و هر بار یک واحد به یکی از جهت های اصلی روی اضلاع صفحه  $\triangle ABC$  حرکت می کند. این ربات دارای دو خانه  $A, B$  است که در ابتدای کار در هر دو خانه عدد صفر قرار دارد.

در هر مرحله بر حسب این که حرکت به سمت شمال، جنوب، شرق یا غرب باشد، به خانه  $A$  یکی اضافه می شود، از خانه  $A$  یکی کم می شود، به خانه  $B$  به اندازه  $A$  اضافه می شود یا از خانه  $B$  به اندازه  $A$  یکی کم می شود. فرض کنید ربات مسیری را طی کند که خودش را قطع نکرده و در نهایت به جای اول خود باز گردد. ثابت کنید در انتهای مسیر قدر مطلق مقدار خانه  $B$  برابر با مساحت درون شکلی است که ربات پیموده.

