

مرحله ی دوم بیست و دومین المپیاد ریاضی ایران

نوبت اول: ۱۸ اردیبهشت ماه ۱۳۸۳

ساعت ۱۴ تا ساعت ۱۸:۳۰

(۱) در مثلث قائم الزاویه ی ABC ($A=90^\circ$)، نقطه ی D محل برخورد نیمساز داخلی زاویه ی A با ضلع BC و نقطه ی I_a مرکز دایره ی محاطی خارجی نظیر زاویه ی A است. (I_a محل برخورد نیمساز های زوایای خارجی B و C است). ثابت کنید

$$\frac{AD}{DI_a} \leq \sqrt{2} - 1$$

(۲) فرض کنید $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ دارای این خاصیت است که $f(x) = x^3$ و $f(x) = 3x$ توابعی صعودی اند. نشان دهید $f(x) = x^2$ نیز صعودی است. (تابع g صعودی گوئیم هر گاه اگر $x \leq y$ آن گاه $g(x) \leq g(y)$)

(۳) وزارت راه مرمت ۲۴۰۰ جاده را به ۸۰ شرکت خصوصی واگذار کرده است، این جاده ها ۱۰۰ شهر را به یکدیگر متصل می کنند. هر جاده بین دو شهر است و بین هر دو شهر حداکثر یک جاده کشیده شده است. می دانیم هر شرکت وظیفه ی مرمت ۳۰ جاده از بین آن هایی که دست کم در یکی از دو سرش نمایندگی دارد به عهده گرفته است. نشان دهید شهری وجود دارد که حداقل ۸ شرکت در آن نمایندگی دارند.



نوبت دوم: ۱۹ اردیبهشت ماه ۱۳۸۳

ساعت ۹ تا ساعت ۱۳

(۴) همه ی توابع $f: N \rightarrow N$ را بیابید که برای هر m, n طبیعی، $m+n$ بر $f(m)+f(n)$ بخش پذیر باشد.

(۵) نیمساز داخلی زاویه ی A از مثلث ABC ، ضلع BC و دایره ی محیطی مثلث ABC را، به ترتیب، در D و M قطع می کند. خطی گذرنده از نقطه ی D دایره ی D به مرکز M و به شعاع MB را در X و Y قطع کرده است.

ثابت کنید خط AD زاویه ی XAY را نصف می کند.

(۶) مهره ی تمساح در جدول $m \times n$ ($m \geq 4$) می تواند همه ی خانه های هم ستون خودش و همین طور خانه های مجاور هم سطر خودش را تهدید کند. حداقل چه تعداد مهره ی تمساح لازم است در جدول گذاشته شود تا هر خانه دست کم توسط یک تمساح تهدید شود؟ (توجه کنید که همه ی تمساح ها باید عمودی باشند.)

