

مرحله ی دوم بیست و سومین المپیاد ریاضی ایران

نوبت اول: ۶ اردیبهشت ماه ۱۳۸۴

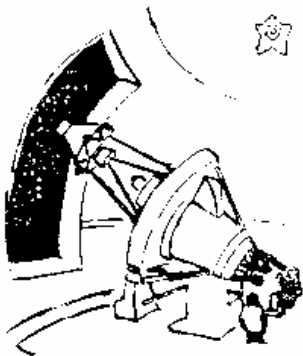
ساعت ۱۴ تا ۱۸:۳۰

(۱) n عددی طبیعی بزرگ تر از یک و p عددی اول است که $n|p-1$ و $p|n^2-1$. نشان دهید $p-3$ مربع کامل است.

توضیح. $a|b$ یعنی b بر a بخش پذیر است، به عبارت دیگر a مقسوم علیه b است. مثلاً $۲|۶$.

(۲) در مثلث ABC ، $A=60^\circ$. نقطه ی متغیر D روی پاره خط BC را در نظر بگیرید. فرض کنید O_1 مرکز دایره ی محیطی مثلث ABD و O_2 مرکز دایره ی محیطی مثلث ACD باشد. محل تقاطع BO_1 و CO_2 را M و مرکز دایره ی محیطی مثلث DO_1O_2 را N می نامیم. ثابت کنید خط MN از نقطه ی ثابتی می گذرد.

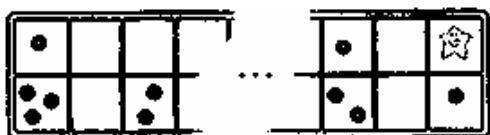
(۳) کهکشان راه دوغی (!) بیش از یک میلیون ستاره دارد. نشان دهید، هر لحظه، فاصله های دو به دو ی این ستاره ها شامل دست کم ۷۹ عدد متمایز است (هر ستاره را یک نقطه فرض کنید).



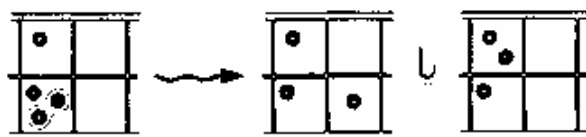
نوبت دوم: ۷ اردیبهشت ماه ۱۳۸۴

ساعت ۹ تا ۱۳:۳۰

(۴) در برخی از خانه های جدولی $n \times 2$ تعدادی مهره قرار دارد.



اگر در خانه ای بیش از یک مهره وجود داشته باشد می توانیم دو مهره از آن خانه خارج کنیم و در عوض یک مهره در خانه ی سمت راستش و یا یک مهره در خانه ی بالایی اش قرار دهیم.



فرض کنید در ابتدا دست کم 2^n مهره در جدول وجود داشته باشد. ثابت کنید می توان مهره ها را طوری جا به جا کرد که یک مهره به خانه ی انتهایی، که در شکل با ستاره مشخص شده است، برسد.

(۵) BC قطر یک دایره و XY وتری عمود بر BC است. نقاط M و P به ترتیب روی XY و CY یا امتداد آن ها به گونه ای قرار گرفته اند که $CY \parallel PB$ و $CX \parallel MP$. محل تقاطع PB و CX را K می نامیم. ثابت کنید

$$PB \perp MK$$

(۶) تمام توابع $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ را بیابید که برای هر $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$(x+y)f(f(x)y) = x^y f(f(x)+f(y))$$

منظور از \mathbb{R}^+ مجموعه ی اعداد حقیقی مثبت است (توجه کنید صفر عددی مثبت نیست!).