

سوالات مرحله ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

به نام او

مرحله ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

زمان: چهار ساعت و نیم

روز اول

سه شنبه ۴ اردیبهشت ۱۳۸۶

(۱) در مثلث ABC زاویه A قائمه است. نقطه M وسط ضلع BC است. نقطه D را روی ضلع AC به گونه ای انتخاب می کنیم که $AM=AD$. محل برخورد دو دایره های محیطی مثلث های AMC و BDC را P می نامیم. نشان دهید خط CP نیم ساز زاویه C است.

(۲) دو رأس مکعبی را A و O نامیده ایم. به طوری که OA قطر یکی از وجوه مکعب است. تعداد مسیر های به طول 1386 از O به خودش بیشتر است یا از O به A ؟ (یک مسیر به طول n عبارت است از دنباله ای از $n+1$ رأس مکعب که هر دو رأس متوالی در دنباله، دو سر یک ضلع مکعب است.)

(۳) در شهری تعدادی ساختمان وجود دارد. می گوئیم ساختمانی به ساختمان دیگر مشرف است اگر خط واصل از بالای ساختمان اول به بالای ساختمان دوم با z مین زاویه ای بیش از 45 بسازد. می خواهیم در مکانی داده شده ساختمان جدیدی بسازیم. نشان دهید اگر ساختمان های قبلی به هم مشرف نباشند می توان این کار را طوری انجام داد که باز هم هیچ ساختمانی به دیگری مشرف نباشد. شهر را صفحه ای افقی و هر ساختمان را پاره خطی عمودی بر صفحه در نظر بگیرید

بارم هر سوال ۷ نمره است.

مرحله ی دوم بیست و پنجمین المپیاد ریاضی کشور

زمان: چهار ساعت و نیم

روز دوم

چهار شنبه ۵ اردیبهشت ۱۳۸۶

(۴) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n می توان n عدد طبیعی متمایز یافت که مجموع آن ها مربع کامل و حاصل ضرب آن ها مکعب کامل باشد

(۵) دو دایره C و D در نقطه P بر هم مماس خارجی هستند. A نقطه ای داخل دایره C است. دو مماس AM و AL بر دایره D رسم می کنیم (M و L محل تماس مماس ها هستند). نقاط تقاطع دوم AM و AL با دایره C را، به ترتیب، E و F می نامیم. نشان دهید نسبت PE به PF برابر است با نسبت ME به LF .

(۶) فرهاد برای جشنواره ی خوارزمی ماشینی طراحی کرده است که وقتی روشن میشود شروع به چاپ کردن اعداد ویژه ای می کند. خاصیت این ماشین این است که برای هر عدد طبیعی n یکی از سه عدد $n, 2n, 3n$ را چاپ می کند. می دانیم ماشین عدد 2 را چاپ می کند. ثابت کنید عدد 13824 چاپ نمی شود.

بارم هر سوال ۷ نمره است.