مسأله های مرحله ی دوم هفتمین دوره ی المپیاد ریاضی

دانش آموزان کشور، بهمن ماه ۱۳۶۸

۱. الف) ثابت کنید برای هر عدد صحیح و مثبت n، نامساوی زیر برقرار است.

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

ب) یک عدد طبیعی n پیدا کنید به طوری که

$$\left\lfloor 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right\rfloor=12$$

($\lfloor x \rfloor$ نمایش جزء صحیح عدد حقیقی x است).

۲. کره ی S به مرکز O و شعاع R، و نقطه ی ثابت P روی آن داده شده است. سه نقطه ی A، B و C روی کره به گونه ای حرکت می کنند که کنج P-ABC همواره کنج سه قائمه است. ثابت کنید صفحه ی مثلث ABC از نقطه ی ثابتی می گذرد.

۳. اگر $\{a_n\}_{n\geq 1}$ یک دنباله باشد که $a_1=1$ و $a_2=2$ و

$$a_{n+1}=1+a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}+(a_1a_2a_3\cdots a_{n-1})^2, \quad (n\geq 2)$$

ثابت کنید که

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)=2$$

۴. در یک مسابقه ی ورزشی m تیم شرکت کرده اند. می دانیم هر دو تیم یک بار با هم مسابقه داده اند و نتیجه ی هر مسابقه برد یک تیم و باخت تیم دیگر بوده است (یعنی نتیجه مساوی نبوده است). ثابت کنید نتایج هر چه باشد یک تیم ورزشی مانند x وجود دارد به طوری که برای هر تیم مانند y، یا x از y برده است و یا اینکه یک تیم z وجود دارد که x از z برده و z از y برده است.

۵. ثابت کنید برای هر عدد طبیعی $n>1$، معادله ی زیر دارای جواب صحیح نیست.

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{x}{1}+1=0$$

۶. خط D را نسبت به مثلث ABC وفادار گوییم هر گـاه در صـفحه ی آن مثلـث بـوده و قرینـه هـای آن نسبت به سه ضلع مثلث مزبور، همرس باشند. ثابت کنید برای هر دو مثلث واقع در یک صفحه که کلیـه ی زاویه های آن ها حاده باشند، یا تنها یک خط وفادار نسبت به آن دو وجود دارد و یا به تعداد نامتناهی.