مسأله های مرحله ی دوم نهمین دوره ی المپیاد ریاضی دانش آموزان کشور

بهمن ماه ۱۳۷۰

۱. ثابت کنید معادله ی $x+x^2=y+y^2+y^3$ در مجموعه ی اعداد صحیح مثبت جواب ندارد.

۲. چهاروجهی ABCD داده شده است.

الف) اگر صفحه ای مانند (P) این چهاروجهی را قطع کند، شرط لازم و کافی برای اینکه مقطع حاصل متوازی الاضلاع گردد چیست؟ نشان دهید در این صورت مسأله دارای سه دسته جواب است.

ب) اکنون یکی از این سه دسته جواب را در نظر می گیریم. وضع صفحه ی (P) را چگونه باید انتخاب کرد تا مساحت متوازی الاضلاع حاصل ماکزیمم گردد.

ج) صفحه ی (P) را به گونه ای اختیار کنید که مقطع حاصل لوزی گردد و در این صورت اندازه ی ضلع لوزی را بر حسب اندازه های یال های چهاروجهی به دست آورید.

۳. فرض می کنیم $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده است، $f(1)=1$

$$f(x+y)=f(x)+f(y),\ (x,y\in\mathbb{R})$$

و برای $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ داریم $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$. همه ی توابع $f(x)$ را به دست آورید.

۴. نشان دهید حداقل شش نقطه با مختصات گویا روی منحنی $y^2=x^3+x+1370^{1370}$ وجود دارد.

۵. مثلث ABC در دایره ی (C) محاط است. نیمساز های درونی زوایای مثلث مزبور دایره ی (C) را مجددا در A'، B' و C' قطع می کنند. اگر I نقطه ی برخورد نیمساز ها باشد ثابت کنید که

$$\frac{IA'}{IA}+\frac{IB'}{IB}+\frac{IC'}{IC}\geq 3$$
$$IA'+IB'+IC'\geq IA+IB+IC$$

۶. سه گروه A، B و C از دانشمندان ریاضی از سه کشور مختلف در [یک] کنفرانس گرد آمده اند. می خواهیم جلسات سه نفری از این دانشمندان تشکیل دهیم به طوری که از هر گروه فقط یک نفر شرکت داشته باشد و هر دو نفر دقیقا در یک جلسه [با هم] شرکت کرده باشند.

الف) اگر این عمل امکانپذیر باشد نشان دهید تعداد افراد هر سه گروه مساویند.

ب) در حالتی که تعداد افراد هر گروه سه باشد نشان دهید این عمل امکانپذیر است.

ج) ثابت کنید در حالت کلیِ تساویِ تعداد اعضای سه گروه، این عمل امکانپذیر است.