

آزمون مدارک برتر ایران



به ابتکار دبیرستان انرژی اتمی ایران



آزمون

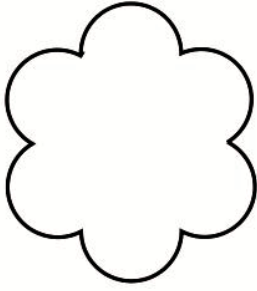
المپیاد

۲۹ مهر ۱۳۹۰

ریاضی مقدماتی

مدت آزمون: ۳/۵ ساعت

۱- یک «شبه گل» از رسم ۶ نیم‌دایره روی اضلاع یک ۶ ضلعی منتظم ساخته می‌شود. هر گاه طول ضلع ۶ ضلعی ۲ واحد باشد مساحت این شبه گل کدام است؟



$4\pi + 6$ (۳)

$3\pi + 9$ (۲)

$3\pi + 6\sqrt{3}$ (۱)

$4\pi + 4\sqrt{3}$ (۵)

$6\pi + 2$ (۴)

۲- هنگامی که داود در تعطیلات به سر می‌برد دقیقاً در ۷ روز باران بارید، در هر روز بارانی، باران دقیقاً در صبح یا بعد از ظهر باریده است و نه در هر ۲ی آن‌ها. همچنین ۵ بعدازظهر وجود دارد که باران بارید و ۶ صبح نیز وجود دارد که در آن‌ها بارانی نباریده است، در این صورت داود دقیقاً چند روز در تعطیلات به سر برده است؟

۱۱ (۵)

۱۰ (۴)

۹ (۳)

۸ (۲)

۷ (۱)

۳- اگر a, b عددهایی صحیح و مثبت باشد و بدانیم: $(a + 2b)(a - b) = 10$ حاصل $2a - b$ کدام است؟

۵ (۵)

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۴- چه تعداد عدد طبیعی بین ۱ تا ۱۰۰۰ دارای دقیقاً ۲۷ شمارنده‌ی مثبت هستند؟

۲۸ (۵)

۲۷ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۵- در یک آزمون چند گزینه‌ای با ۳۰ پرسش به ازای هر پاسخ درست ۵ امتیاز، برای هر پاسخ نادرست صفر امتیاز و در ازای هر پرسش بدون پاسخ ۱ امتیاز به دانش‌آموز تعلق می‌گیرد. ۵ داوطلب چنین مدعیاتی مطرح می‌کنند:

ایرج: امتیاز من ۱۴۴ شده.

محسن: من امتیاز ۱۴۷ را کسب کردم

هادی: من امتیاز ۱۴۱ را بدست آوردم.

طه: امتیاز من ۱۴۳ شده.

احمد: امتیاز من ۱۳۹ شده است.

اگر تنها ادعای یک دانش‌آموز بتواند صحت داشته باشد، آن دانش‌آموز چه کسی است؟

احمد (۵)

هادی (۴)

طه (۳)

ایرج (۲)

محسن (۱)

المپیاد ریاضی مقدماتی

۶- اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $x^6 = 2$ باشد حاصل عبارت $(\alpha^{-12} + \alpha^{13} + \dots + \alpha^{41})(\alpha - 1)$ کدام است؟

- ۱۲۴ (۱) ۱۴۴ (۲) ۱۹۲ (۳) ۲۱۲ (۴) ۲۵۲ (۵)

۷- اگر $n + 1 = 2010^2 + 2011^2$ حاصل $\sqrt{2n+1}$ کدام است؟

- $2010\sqrt{2}$ (۱) ۴۰۰۹ (۲) ۴۰۲۱ (۳) $\sqrt{1+4020^2}$ (۴) $\sqrt{3+4020^2}$ (۵)

۸- تعداد زیر مجموعه‌های ۷ عضوی مجموعه‌ی $\{1, 2, 3, \dots, 9\}$ که مجموع اعضای آن‌ها بر ۳ قابل قسوت باشد چند تا است؟

- ۱۰ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴ (۵)

۹- اگر $S(n)$ را حاصل ضرب ارقام عدد n وقتی که در مبنای ۴ نوشته می‌شود تعریف کنیم: (به طور مثال: اگر:

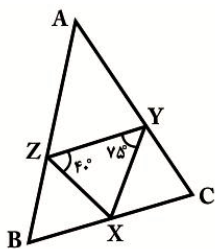
$$S(31) = 1 \times 3 \times 3 = 9 \iff 31 = (133)_4$$

$$S(1) + S(2) + S(3) + \dots + S(255)$$

کدام است؟

- ۱۴۹۶ (۱) ۱۵۵۴ (۲) ۱۵۷۲ (۳) ۱۵۹۶ (۴) ۱۶۲۴ (۵)

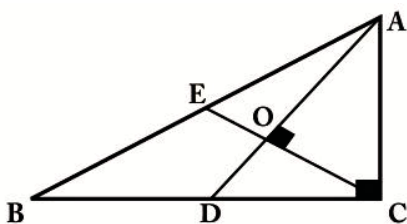
۱۰- در مثلث ABC می‌دانیم: $AY = AZ$ و $BX = BZ$ و $CX = CY$ اندازه‌ی زاویه‌ی \hat{A} کدام است؟



- ۵۵° (۳) ۶۰° (۲) ۵۰° (۱)

- ۵۷/۵° (۵) ۵۲/۵° (۴)

۱۱- مطابق شکل E وسط AB , D وسط BC می‌باشد. اگر بدانیم: $AC = 4$ طول AB کدام است؟



$$\hat{AOC} = \hat{ACD} = 90^\circ$$

- ۳۰ (۱) $2\sqrt{13}$ (۲) $3\sqrt{6}$ (۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{3}$ (۵)

۱۲- هر گاه: $x + y + z = 6$ و $xy + yz + zx = 11$ و $xyz = 6$ حاصل $\frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{3}$ (۲) $\frac{13}{6}$ (۳) $\frac{5}{3}$ (۴) $\frac{6}{11}$ (۵) $\frac{8}{3}$

۱۳- اگر $0 < x < y < 1$ کدام گزینه لزوماً درست نیست؟

- (۱) $(x - y)^2 < x^2$ (۲) $(x - y)^2 < y^2$
 (۳) $x^2 < 2y^2$ (۴) $x^2 - y^2 < x^2$ (۵) $y^2 - x^2 < y^2$

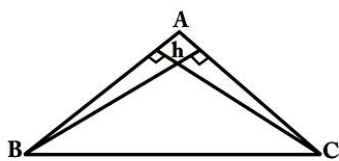
۱۴- برای چند عدد طبیعی m در بازه $[10, 100]$ ، $m^2 + m - 90$ بر ۱۷ قابل قسمت است؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰ (۵) ۱۱

۱۵- مثلث متساوی الساقینی با طول ساق ۲ و طول قاعده‌ی دل خواه مفروض است، برای چه مقدار از طول قاعده، مساحت مثلث حداکثر مقدار خود را می‌یابد؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴) $2\sqrt{2}$ (۵) ۳

۱۶- در شکل مقابل اندازه‌ی زاویه‌ی $B\hat{H}C$ بر حسب زاویه‌ی \hat{A} کدام است؟



- (۱) $3\hat{A}$ (۲) $360^\circ - \hat{A}$ (۳) $180^\circ - \hat{A}$
 (۴) $2\hat{A}$ (۵) \hat{A}

۱۷- اگر چند جمله‌ی $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - c$ با ضرایب ناصفر به شکل $(x - a)(x - b)(x - c)$ تجزیه شود، حاصل $P(2)$ چه خواهد بود؟

- (۱) ۴ (۲) صفر (۳) -۳ (۴) ۹ (۵) ۷

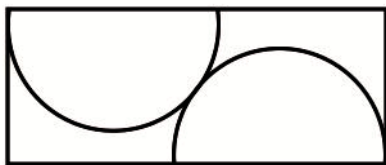
۱۸- کدام یک از عددهای زیر به $10 - \sqrt{101}$ از همه نزدیک تر است؟

- (۱) $\frac{1}{16}$ (۲) $\frac{1}{18}$ (۳) $\frac{1}{20}$ (۴) $\frac{1}{22}$ (۵) $\frac{1}{24}$

المپیاد ریاضی مقدماتی

۱۹- خیاطی مطابق شکل می‌خواهد از یک قطعه پارچه به ابعاد $160 \times 80 \text{ cm}^2$ ، ۲ نیم‌دایره با اقطار مساوی برش بزند. قطر

بزرگ‌ترین نیم‌دایره‌هایی که می‌تواند برش بزند کدام است؟



۸۰ (۳)

۹۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

۱۲۵ (۵)

۱۰۰ (۴)

۲۰- معادله $x^2 - 2xy + 2y^2 - 6y + 10 = 0$ روی عددهای حقیقی چند ریشه دارد؟

۶ (۵)

۲ (۴)

۴ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

مسأله‌های کوتاه

دانش آموز عزیز، در این بخش شما باید به ۱۰ سوال پاسخ دهید. جواب این سوالات یک عدد حداکثر دو رقمی است و شما باید ارقام آن را جداگانه در پاسخنامه علامت بزنید.

توجه کنید که رقم یکان عدد در ستون یکان، و رقم دهگان در ستون دهگان علامت زده شود.

به عنوان مثال اگر پاسخ سوالی ۲۷ بود شما باید در مقابل شماره سوال در پاسخنامه همانند شکل علامت بزنید.

دهگان	یکان
○	○
①	①
●	②
③	③
④	④
⑤	⑤
⑥	⑥
⑦	●
⑧	⑧
⑨	⑨

المپیاد ریاضی مقدماتی

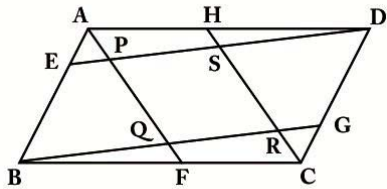
۶۱- ۴ دایره‌ی دل خواه در صفحه ترسیم شده‌اند، حداکثر چند نقطه در صفحه، حادث از تقاطع اقلأً ۲ دایره هستند؟

۶۲- اگر بدانیم: $\frac{A}{1.1} = \frac{9}{1.1} + \frac{99}{1.2} + \frac{999}{1.3} + \dots + \frac{9999999999}{1.10}$ در این صورت نمایش دهمی A شامل چند عدد ۸ خواهد بود؟

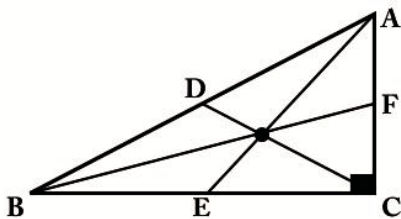
۶۳- حاصل جمع جواب‌های معادله‌ی زیر در عددهای حقیقی چند است؟ (منظور حاصل جمع تمامی a, b هایی است که در معادله‌ی زیر صدق می‌کند)

$$a(1-a)(b-a+1) + (b-a+1)(a^2-b+1) + a(a^2-b-1)(1-a) = 0$$

۶۴- مطابق شکل $ABCD$ متوازی الاضلاع است و E, F, G, H وسط‌های اضلاع آن هستند نسبت مساحت ۴ ضلعی $ABCD$ به مساحت ۴ ضلعی $PQRS$ چند است؟



۶۵- اگر مثلث ABC در C قائمه باشد و D, E, F وسط‌های اضلاع مثلث باشند و بدانیم: $CD = 2$ در این صورت مقدار $AE^2 + BF^2$ چقدر است؟



۶۶- اگر m, n عددهایی صحیح و مثبت باشند و بدانیم: $mn = 4 \times 10^4$ و نیز بدانیم هیچ یک از m, n بر ۱۰ بخش پذیر نیستند، باقی مانده‌ی تقسیم $m + n$ بر ۱۰ چه خواهد بود؟

۶۷- سارا از یک ردیف شیرینی که شامل ۳ نوع متفاوت شیرینی است، ۶ عدد شیرینی انتخاب می کند. اگر از هر نوع شیرینی ۶ عدد در ردیف موجود باشد، سارا به چند روش می تواند ۶ عدد شیرینی خود را انتخاب کند؟

۶۸- اگر برای عددهای صحیح a, b, m, n بدانیم: $1008 = 6nb^2 - 36ma^2$ در این صورت بزرگترین عدد صحیح که هر ۲ عدد a, b را بشمارد چند است؟

۶۹- اگر بدانیم $Q(x+3) = 3x^2 + 7x + 4$ و $Q(x) = ax^2 + bx + c$ مجموع ۲ رقم سمت راست $9c - 7b + 6a$ چقدر است؟

۷۰- یک بازیکن بسکتبال ۵ پرتاب انجام می دهد که هر یک ۲ یا ۳ امتیازی بوده است وی چند امتیاز متفاوت می تواند کسب کرده باشد؟