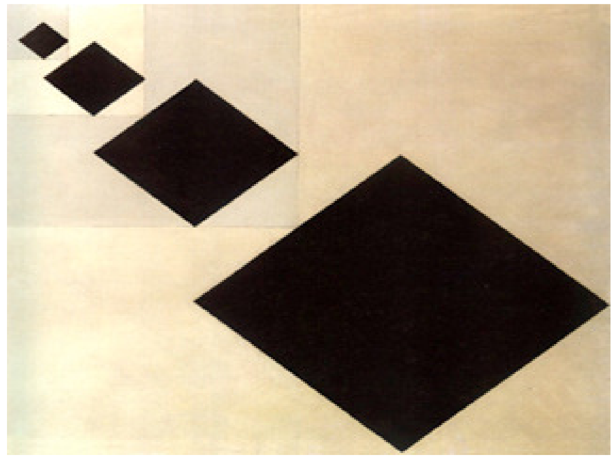
سوال:چند تا از توان هاي ۲ با ۷ شروع مي شوند؟



دنباله‌ي $\{۲^n\}_{n=1}^{\infty}$ را در نظر بگيريد. دنباله‌ي اعدادي كه عناصر اين دنباله با آن‌ها آغاز مي‌شوند را تشكيل دهيد.چند جمله‌ي اوّل اين دنباله عبارت هستند از :

۲,٤,۸,۱,۳,٦,۱,۲,٥,...

اين دنباله را با $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ نشان مي‌دهيم. با كمي دقت مي‌بينيم كه ۷ در چند جمله‌ي اوّل اين دنباله ظاهر نمي‌شود. شايد در نظر اوّل چنين نتيجه گيري كنيم كه ۷ اصلاً در اين دنباله ظاهر نمي‌شود امّا اگر كمي حوصله به خرج دهيم، خواهيم ديد كه اوّلين جايي كه ۷ ظاهر مي‌شود جمله‌ي چهل و ششم است. چند جمله‌ي بعد از آن كه برابر ۷ مي‌باشند عبارت هستند از:
$x_{۴۶}, x_{۵۶}, x_{۶۶}, x_{۷۶}, x_{۸۶}$.

سؤالي كه در اين جا مطرح مي‌شود اين است كه چند جمله‌ي $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ برابر ۷ است؟

ادّعا:ثابت مي‌كنيم كه بي‌نهايت جمله‌ي اين دنباله برابر ۷ است.

مقدّمات اثبات ادّعا: ۲^n با ۷ آغاز مي‌شود اگر و تنها اگر عدد طبيعي k موجود باشد كه $۷\times۱۰^k < ۲^n < ۸\times۱۰^k$ و اين معادل است با آن كه: $k + \log ۷ < n \log ۲ < k + \log ۸$ يا معادلاً $\log ۷ < n \log ۲ - k < \log ۸$. چون $۰ < \log ۷ , \log ۸ < ۱$ و $k \in N$ پس ۲^n با ۷ آغاز مي‌شود اگر و تنها اگر $\log ۷ < n \log ۲ - [n \log ۲] < \log ۸$.
اكنون توجه شما را به دو لم زير جلب مي‌كنيم:

لم۱: $\log ۲$ گنگ است.

اثبات:اگر $\log ۲$ گويا باشد پس اعداد صحيح p و $q \neq ۰$ موجودند كه $\log ۲ = \frac{p}{q}$ و لذا:

$$p = q \log ۲ \rightarrow ۱۰^p = ۲^q \rightarrow ۵ \mid ۲^q$$

كه تناقض است، بنابراين $\log ۲$ گنگ است.

لم ۲:اگر $a,b\in[0,1]$و b>a و x>۰ عددي گنگ و $c(n)=nx-[nx]$ باشند آنگاه بازه‌ي(a,b)شامل بي‌نهايت عنصر دنباله‌ي $\{c(n)\}_{n=1}^{\infty}$ است.

اثبات:اوّلا توجه داريم كه عناصر دنباله‌ي $\{c(n)\}_{n=1}^{\infty}$متمايز هستند چرا كه اگر $m\neq n$ موجود باشند كه $c(n)=c(m)$ آن‌گاه داريم:

$$nx-[nx]=mx-[mx]\to(n-m)x=[nx]-[mx]$$
$$\to x=\frac{[nx]-[mx]}{n-m}\in Q$$

كه تناقض است.

اكنون عدد طبيعي n را طوري مي‌گيريم كه $\frac{1}{n}<b-a$. n+۱ عدد متمايز $c(1),c(2),...,c(n+1)$ در [۰،۱] هستند پس طبق اصل لانه كبوتري؛ $i,j\in N$ موجودند كه: $1\leq i,i+j\leq n+1$و داريم:

$$0<\varepsilon:=|c(i)-c(i+j)|\leq\frac{1}{n}<b-a \quad (1)$$

اگر T دايره‌ي به محيط واحد و گذرا از $O(0,0)$ باشد، مي‌توان تناظري يك به يك بينT و (۰،۱]برقرار كرد.[چگونه ؟]پس به جاي بازه‌ي(a,b)مي‌توان كمان متناظرش را برT در نظر گرفت.اين كمان را نيز با (a,b) نشان مي‌دهيم. تابع $f:T\to T$ كه معرّف دوران به اندازه‌ي $2\pi x$ راديان در خلاف جهت حركت عقربه‌هاي ساعت است را در نظر مي‌گيريم. اين تابع وارون‌پذير است و وارون آن عبارت است از: $g:T\to T$ كه معرّف دوران به اندازه‌ي $2\pi x$ راديان در جهت حركت عقربه‌هاي ساعت مي‌باشد.

براي $b(n):=f^{n}(O)=fofo...of(O)\ ,n\in N$ (f را n بار تركيب كرده ايم.)در نظر مي‌گيريم.عناصر دنباله‌ي $\{b(n)\}_{n=1}^{\infty}$ متمايز هستند چرا كه اگر n>m موجود باشند كه $b(n)=b(m)$ و $b(n-m)=f^{n-m}(O)=a$ آن‌گاه $f^{n}(O)=f^{m}(a)$ و در نتيجه $f^{n}(O)=f^{m}(a)$.اگر g را m بار بر طرفين تساوي اخير،اثر دهيم آن‌گاه $a=O$و لذا $f^{n-m}(O)=O$ و اين يعني عدد طبيعي M موجود است كه $(n-m)(2\pi x)=M(2\pi)$ بنابراين

$$x=\frac{M}{n-m}\in Q$$

كه تناقض است.

در اين لحظه نشان مي‌دهيم كه براي n دلخواه، طول كمان $(O,b(n))$برابر c(n)است.

$$\text{طول كمان }(O,b(n))=2\pi(nx-[nx]).\frac{1}{2\pi}=nx-[nx]=c(n)$$

پس با توجه به رابطه ي (۱)، طول كمان بين b(i) و b(i+j) برابر ε است و اين يعني j دوران متوالي به اندازه‌ي $2\pi x$ راديان در خلاف جهت حركت عقربه‌هاي ساعت معادل است با دوران به اندازه‌ي $2\pi\varepsilon$ راديان كه جهت دوران اخير، ممكن است در جهت يا در خلاف جهت حركت عقربه‌هاي ساعت باشد،حال دنباله‌ي $\{b(sj)\}_{s=1}^{\infty}$ را در نظر مي‌گيريم.توجه داريم كه عناصر اين دنباله متمايز هستند. اگر از $O(0,0)$ شروع كنيم و دوران به اندازه‌ي $2\pi\varepsilon$راديان را به طور متوالي اعمال كنيم، چون

$\varepsilon < b-a$ است پس بي‌نهايت عنصر دنباله‌ي فوق در كمان (a,b) واقع مي‌شوند و اين يعني بازه ي (a,b) شامل بي‌نهايت عنصر دنباله‌ي $\{c(n)\}_{n=1}^{\infty}$ است و به اين ترتيب،لم ۲ اثبات مي شود.

اگر در لم ۲، $a=\log 7$، $b=\log 8$، $x=\log 2$ [بنابر لم ۱، $\log 2$ گنگ است.]قرار دهيم آن‌گاه براي تعداد نامتناهي n ، $\log 7 < n\log 2-[n\log 2] < \log 8$ و اين يعني بي‌نهايت جمله‌ي دنباله‌ي $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ برابر ۷ است.[به مقدّمات توجه كنيد.]

جواب:تعداد نامتناهي از توان هاي ۲ با ۷ شروع مي شوند.

منابع :

www.anjoman.ir