هتل بی نهایت داستان جالبی است که "دیوید هیلبرت "مطرح کرده است،شما از این داستان می توانید مطالب زیادی در باره ی مفاهیم "هم ارزی مجموعه ها "و هم چنین "مجموعه های نا متناهی" یاد بگیرید.
این مقاله زمینه ی مناسبی را برای بحث در خصوص مفهوم بی نهایت و هم چنین مفهوم هم ارزی (مخصوصا" مجموعه های Q , N , W , Z)فراهم می کند.
این داستان در متون رسمی به هتل "بی نهایت "شهرت دارد.
اگر بخواهیم در این داستان از کلمه ی بی نهایت استفاده نکنیم، برای توضیح در مورد اتاق های هتل هیلبرت می توانیم بگوییم :"اتاق های این هتل تمامی ندارد!یعنی برای هر عددی که شما در نظر بیاورید ،هتل اتاقی با آن شماره و نیز اتاق هایی با شماره های بیش از آن دارد"
ما در این جا ابتدا مفهوم هم ارزی مجموعه ها را شرح می دهیم:
تعریف (۱):دو مجموعه ی A,B (چه متناهی و چه نا متناهی ) را هم ارز (یا هم اندازه) می گوئیم،هرگاه تابع یک به یک و پوشایی چون f وجود داشته باشد که دامنه ی آن A و برد آن B باشد.هم ارزی A و B را با نماد A~B نشان می دهیم.
تعریف(۲):می گوئیم مجموعه ی A کوچک تر یا مساوی B است و می نویسیم:A≤B، اگر و تنها اگر یک تابع یک به یک (نه الزاما" پوشا)ازA به B موجود باشد.
در ریاضیات قضیه ای وجود دارد که بیان می کند :اگر شرایط A≤B و B≤A برای دو مجموعه ی Aو B برقرار باشند آن گاه A هم ارز B خواهد بود.(یعنی A~B). حال به بررسی سکانس های "هتل داری آقای هیلبرت" می پردازیم.

سکانس اول:مجموعه ی اتاق های هتل را با N یا همان مجموعه ی اعداد طبیعی نشان می دهیم.به این ترتیب که هر عدد متناظر بااتاقي باشد که شماره ی آن اتاق، عدد مذکور است.مثلا" عدد ۳ متناظر با اتاق شماره ی ۳ است،فرض کنید درتمام اتاق هاي هتل، مسافر اقامت دارد وبازرسي وارد هتل مي شود ،به علاوه مجموعه ی W { $W = N \cup \{0\}$ } را متناظر با مسافران هتل آقای هیلبرت می گیریم،به این ترتیب که عدد ۰ در این مجموعه، متناظر با آقای بازرس است و براي ساير عدد ها،هر عدد متناظر با فردی است که قبل از آمدن آقای بازرس در اتاقی با همان شماره اقامت داشته است.به عنوان مثال عدد ۵ متناظر با فردی است که پیش از آمدن آقای بازرس در اتاق شماره ی ۵ اقامت داشته است.
حال تابع $f: W \longrightarrow N$ را با ضابطه ي $f(n) = n+1$ در نظر مي گيريم . این تابع هر کدام ازساکنان اتاق های هتل آقای هیلبرت (پیش از آمدن آقای بازرس) را یک اتاق به جلو هدایت می کند.به علاوه آقای بازرس را در اتاق اول جای می دهد.
تمرین(۱):یک به یک و پوشا بودن تابع f را تحقیق کنید و با توجه به تعریف هم ارزی دو مجموعه، این مطلب را نتیجه بگیرید: W~N .
سکانس دوم:آن چه در این بخش آمده است، تعبیری است از هم ارزی مجموعه ی اعداد طبيعي فرد(O) با مجموعه ی اعداد طبیعی.چرا که در این بخش، همه ی اتاق های با شماره ی فرد هتل پسر عموی آقای هیلبرت (که هم اندازه با O است)را با همه ی مسافران هتل آقای هیلبرت (که هم اندازه با N است)پر کردیم.
این عمل را می توان با تابع $g: N \longrightarrow O$ بیان کرد که $g(n) = 2n-1$ .
تمرین(۲):یک به یک وپوشا بودن تابع g را تحقیق کنیدو N~O را نتیجه بگیرید.
به روش مشابه مي توان نشان داد : N~E که در آن E مجموعه ي اعداد طبيعي زوج است .
تمرین(۳):با استفاده از راهنمایی زیر، هم ارزی مجموعه ی اعداد صحیح و اعداد طبیعی(N~Z) را اثبات کنید.
راهنمایی:تابعی چون $h: Z \longrightarrow N$ تعریف کنید که اعداد صحیح نا منفی را به اعداد طبیعی زوج ببرد و اعداد صحیح منفی را به اعداد طبیعی فرد ببرد.سپس دو سوئی بودن این تابع را تحقیق کنید.
سکانس سوم: N ×N ~N .
تمرین(٤):درستي ادعاي فوق را ثابت کنید .( راهنمائي : $N \times N = \bigcup_{n=1}^{\infty} (N \times \{n\})$ ) .
حال ادعا می کنیم N~Q .

برای اثبات این موضوع مجموعه ی اعداد گویا را مجموعه ای از کسر ها می گیریم که صورت و مخرجشان نسبت به هم اولند.هم چنین مجموعه های Q+ و Q – را به ترتیب مجموعه ی اعداد گویای مثبت و منفی می گیریم:

با دو تابع زیر ادعای خود را ثابت می کنیم:

تابع $N \times i: N \longrightarrow Q^+$ یک به یک بودن این تابع را تحقیق کنید.

$$i\,(m,n)=\frac{2^m}{1n+1}$$

و تابع $N \times j: +Q \longrightarrow N$ یک به یک بودن این تابع را تحقیق کنید.

$$j\left(\frac{m}{n}\right)=(m,n)$$

( که n,m نسبت به هم اولند) .

از این دو تابع نتیجه می شود که $N \times N \sim +Q$. و چون $+Q \sim -Q$ .(چرا؟)،پس می توان نتیجه گرفت که $-Q \sim N \times N$ .

لم:اگر براي مجموعه هاي دلخواه A,B,C,D داشته باشيم:

$$A \sim B, C \sim D, A \cap C = \phi, B \cap D = \phi$$ .

آن گاه : $A \cup C \sim B \cup D$ .

چون : $O \sim N \sim N \times N \sim +Q , E \sim N \sim N \times N \sim -Q$ .

پس با توجه به لم فوق خواهیم داشت : $Q - \{0\} \sim N$ .

و با استفاده از آن چه در سكانس اول فراگرفتيم، مي توان رابطه ي زير را نتيجه گرفت : Q~N .

وبه اين ترتيب مساله تمام مي شود .

منبع : مدرسه ی اینترنتی تبیان ( با چند اصلاح ) .