

در این مقاله ، نشان خواهیم داد که در مثلث خیام - پاسکال از ردیف سوم به بعد ،هیچ دو عنصر مخالف با ۱ در یک ردیف ، نسبت به هم اول نیستند...

مطمئناً همه ی شما با مثلث خیام - پاسکال آشنایی دارید و طرز ساخت آن را می دانید.بد نیست یادآور شویم که در ردیف n ام این مثلث ، عنصر k ام از جمع عناصر k ام و k-۱ ام ردیف n-۱ ام به دست می آید (n>۱ و ۰<k<n) . در این جا،چند ردیف از این مثلث را آورده ایم :

ردیف شماره ۰	۱								
ردیف شماره ۱	۱	۱							
ردیف شماره ۲	۱	۲	۱						
ردیف شماره ۳	۱	۳	۳	۱					
ردیف شماره ۴	۱	۴	۶	۴	۱				
ردیف شماره ۵	۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱			
ردیف شماره ۶	۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱		
ردیف شماره ۷	۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱	
ردیف شماره ۸	۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱

لم: در ردیف n ام (n=۰, ۱, ۲, ۳,...) این مثلث، عنصر k ام (n و ۰ و ۱ و k به صورت  $\binom{n}{k}$  است.

$$(۱) \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{برای } 1 \leq k \leq n \text{ داریم:}$$

اکنون با استفاده از رابطه ی (۱) و به کمک استقرا ، لم اثبات می شود.(جزئیات به عهده ی خواننده).

بنابراین می توان مثلث خیام - پاسکال را به صورت زیر در نظر گرفت:

		$\binom{0}{0}$							
		$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
		$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
		$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
		$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
		$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
		$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$	
		$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$
		⋮							

قضیه:در مثلث خیام - پاسکال از ردیف سوم به بعد ،هیچ دو عنصر مخالف با ۱ در یک ردیف ، نسبت به هم اول نیستند.

$$(۲) \quad \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m} \quad \text{برای } 0 \leq m \leq k \leq n \text{ داریم:}$$

مساله: آیا می توانید رابطه ی (۲) را با یک بحث ترکیبیاتی اثبات کنید.

$$\binom{n}{m} \binom{n}{k} > 1$$

حال نشان می دهیم که برای  $0 < k < n < m$  داریم :

فرض کنیم این طور نباشد، یعنی  $\binom{n}{k} \binom{n}{m} = 1$  با توجه به رابطه ی (۲)،  $\binom{n}{m}$  عاد می کند  $\binom{n}{k} \binom{n}{m}$  را. چون  $\binom{n}{k} \binom{n}{m}$

نسبت به هم اول اند. پس طبق لم اقلیدس  $\binom{n}{m}$  عاد می کند  $\binom{k}{m}$  را، ولی این ممکن نیست چرا که  $\binom{n}{m} > \binom{k}{m}$

به این ترتیب ، قضیه اثبات می شود.

منبع :

[www.anjoman.ir](http://www.anjoman.ir)