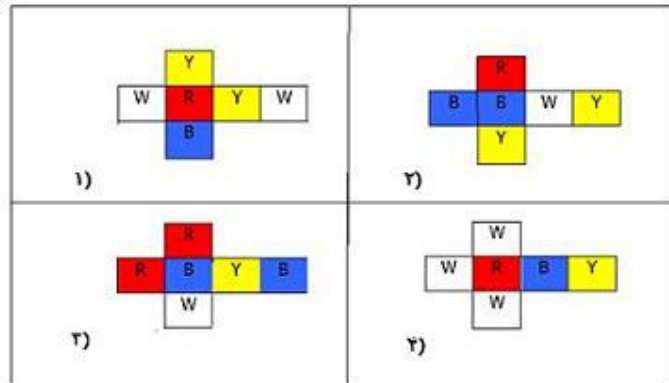


بازی مکعب های رنگی با چهار مکعب انجام می گیرد. ابتدا وجه های مکعب ها را رنگ می کنیم. در رنگ آمیزی وجه های هر مکعب، تمام رنگ های قرمز (R)، سفید (W)، آبی (B)، زرد (Y)، به کار رفته اند. ما می توانیم این چهار مکعب را به صورت های مختلفی رنگ آمیزی کنیم، که در این جا برای نمونه، شکل ۱ را آورده ایم .



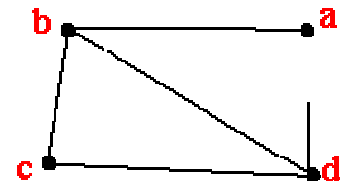
هدف این بازی، چین این مکعب ها در یک ستون است به طوری که در هر طرف این ستون، هر چهار رنگ (مختلف) دیده شوند. به روش های مختلف می توان این مکعب ها را روی هم چید، با این وجود ممکن است حتی يك جواب هم نداشته باشیم . قبل از حل ، شما را با چند مفهوم ساده ی نظریه ی گراف آشنا می کنیم.

تعریف گراف: یک گراف شامل یک مجموعه ی  $V$  از راس ها است که با یک مجموعه ی  $E$  متشکل از زیر مجموعه های  $۲$  عضو  $V$  که یال نامیده می شوند، جفت شده اند.

مثال:

$$V = \{a, b, c, d\}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}, \{b, d\}\}$$



واصطلاحاً می گوییم یال های  $\{a, b\}$  و  $\{a, d\}$  از راس  $a$  خارج (یا به آن وارد) شده اند. تعریف طوقه: یالی که از راس  $a$  به خودش رسم می شود را یک طوقه می نامند و با  $\{a\}$  نمایش می دهند .



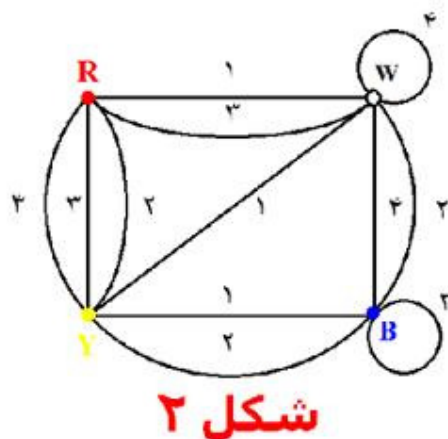
این یال از راس  $a$  به خودش است

تعریف زیر گراف: زیر گراف، گراف  $G$ ، گرافی است که مجموعه ی راس ها و یال هایش، زیر مجموعه ی راس ها و یال های گراف  $G$  باشد.

حال به حل مساله می پردازیم.

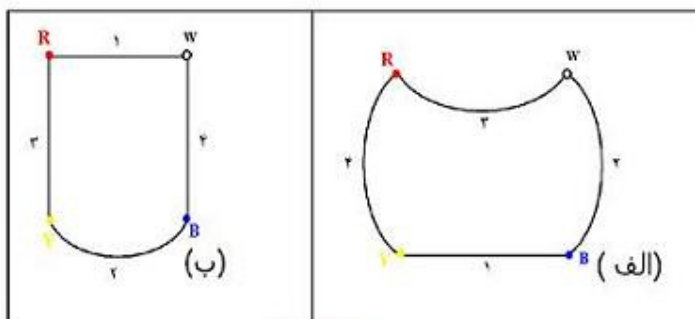
در جریان حل این مساله ، گراف ما را یاری می کند که وضعیت را بهتر مجسم کنیم. در شکل ۲ گرافی با چهار راس  $R, W, B, Y$  داریم. برای کشیدن گراف مربوطه، در هر مکعب هر سه جفت وجه روبه روی هم را بررسی می کنیم. مثلاً "در مکعب (۱) دو

وجه روبه روی هم زرد و آبی هستند. پس یالی بین راس  $Y$  و راس  $B$  رسم می کنیم و آن را با (۱) (که نشان گر مکعب ۱ است) نشان می دهیم. دو یال دیگری که در این گراف با (۱) نشان شده اند، متناظر دو وجه سفید و زرد و دو وجه قرمز و سفید مکعب ۱ هستند که روبروی هم می باشند. همین کار را برای مکعب های دیگر نیز انجام داده ایم و به گراف شکل (۲) رسیده ایم. برای طوقه ها نیز به همین روش، مثلاً "طوقه ای که در راس  $B$  با ۳ نشان گذاری شده است، دو وجه آبی روبه روی هم را در مکعب ۳ نشان می دهد. این گراف ۱۲ یال دارد و این یال ها به ۴ دسته ی ۳ تایی تقسیم می شوند که یال های هر دسته با شماره ی یکی از مکعب ها، نشان گذاری شده است. در هر راس، تعداد یال هایی که از آن راس خارج یا به آن وارد می شوند، برابر است با تعداد وجه هایی از هر چهار مکعب که به آن رنگ هستند. (هر طوقه را دوبار می شماریم.) بنابراین گراف شکل (۲) به ما می گوید که در این چهار مکعب، ۵ وجه قرمز، ۷ وجه سفید، ۶ وجه آبی و ۶ وجه زرد داریم.



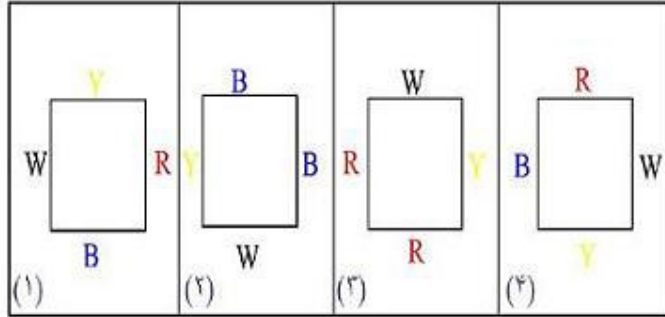
شکل ۲

چهار مکعب را که در یک ستون، روی هم قرار گرفته اند، در نظر می گیریم و طرفین روبه روی هم در این ستون را بررسی می کنیم. برای دو طرف روبه روی هم در این ستون، یک زیر گراف از این گراف را متناظر می کنیم، با این خاصیت که: این زیر گراف دارای چهار راس (رنگ) و چهار یال بوده و هر نشان یک بار به کار رود. (در این زیر گراف، متناظر با هر راس، دو یال قرار دارد.) حال اگر بتوانیم نتیجه ی مشابهی را برای دو طرف دیگر این ستون به دست آوریم حل مساله تمام است. برای این کار به زیر گراف دوم، مشابه شکل (۳) الف، نیاز داریم که شامل هیچ یالی از شکل (۳) الف نباشد. مطابق شکل (۳) ب، چنین زیر گرافی وجود دارد.



شکل ۳

شکل (۴)، نشان می دهد که چگونه می توان این مکعب ها را با توجه به اطلاعات ارائه شده به وسیله ی زیر گراف های شکل (۳) مرتب کنیم.



شکل ۲

به طور کلی به ازای هر چهار مکعب دلخواه، یک گراف نشان دار می سازیم و می کوشیم که در آن دو زیر گراف چنان بیابیم که:

- ۱- هر زیر گراف شامل هر ۴ راس باشد و به ازای هر نشان به کار رفته، یک پال، یعنی روی هم ۴ پال داشته باشد.
- ۲- در هر زیر گراف، هر راس دقیقاً روی دو پال قرار داشته باشد. (طوقه دو بار به حساب می آید).
- ۳- هیچ پال نشان دار گراف، نشان دار هم زمان در هر دو زیر گراف نباشد.

منبع: کتاب ریاضیات گسسته و ترکیباتی  
نویسنده: رالف. پ. گریمالدی

مترجم: بیژن شمس، محمد علی رضوانی