انگيزه‌ي نوشتن اين مقاله، اهميّتي است كه نامساوي‌ها در تمام شاخه‌هاي رياضيات دارند تا جايي كه گاهي از تساوي‌ها نيز مهم‌ترند. چون احكام نامساوي‌هاي هندسي را به آساني مي‌توان فهميد از اين رو جذابيّت خاصّي دارند در عين حال مقدّمه‌اي بسيار خوب براي آشنايي با رياضيات جديد و انديشه‌ي خلّاق رياضي هستند. در اين جا شما را با چند نامساوي مهم هندسي و روش به دست آوردن آن‌ها آشنا مي‌كنيم.

۱- نامساوي ميانگين‌هاي حسابي- هندسي:

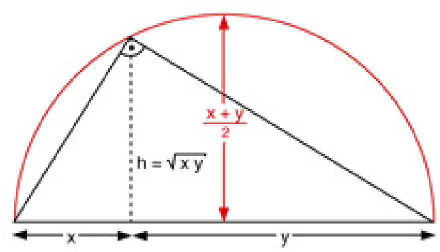
تعريف: براي اعداد حقيقي $x_1, x_2, \dots, x_n$ ؛ ميانگين حسابي را به صورت زير تعريف مي‌كنيم:

$$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

تعريف: براي اعداد حقيقي نامنفي $x_1, x_2, \dots, x_n$ ؛ ميانگين هندسي را به صورت زير تعريف مي‌كنيم:

$$\ell = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

حكم: براي اعداد حقيقي نامنفي $x_1, x_2, \dots, x_n$ ؛ ميانگين هندسي از ميانگين حسابي؛ نابيش‌تر است يعني: $\ell \le \mu$.



پيش از پرداختن به اثبات اين حكم، ابتدا لم زير را مي آوريم :

لم: اگر x عدد حقيقي نامنفي دلخواهي باشد آن‌گاه: $e^x \ge 1 + x$.

اين لم به كمك قضيه ي مقدار ميانگين اثبات مي شود و در كتب استاندارد حساب ديفرانسيل و انتگرال آمده است .

اثبات حكم: براي $i = 1, 2, \dots, n$ ، با جايگذاري $x = \frac{x_i}{\mu} - 1$ در نامساوي لم خواهيم داشت: $\exp(\frac{x_i}{\mu} - 1) \ge \frac{x_i}{\mu}$ و لذا:

$$\prod_{i=1}^{n} \exp(\frac{x_i}{\mu} - 1) \ge \prod_{i=1}^{n} (\frac{x_i}{\mu})$$

$$\Rightarrow \exp(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\mu} - n) \ge \frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\mu^n}$$

$$\Rightarrow \exp(n - n) \ge \frac{\ell^n}{\mu^n} \Rightarrow 1 \ge \frac{\ell^n}{\mu^n} \Rightarrow \mu^n \ge \ell^n \Rightarrow \mu \ge \ell$$

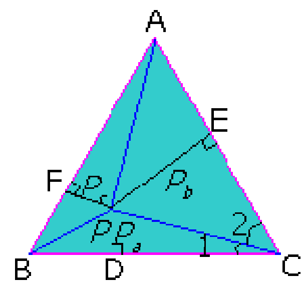
۲- نامساوي اردوش- موردل:

حکم:اگر P نقطه‌ي دلخواهي درون مثلث ABC , P_a , P_b , P_c به ترتيب، فاصله‌ي P از اضلاع c,b,a باشند آنگاه:

$$PA+PB+PC \geq 2(P_a+P_b+P_c)$$

و تساوي برقرار است اگر و تنها اگر مثلث ABC متساوي‌الاضلاع بوده و P مرکز ثقل آن باشد.

اثبات:



$$DE^2 = P_a^2 + P_b^2 - 2P_aP_b\cos(D\hat{P}E) = P_a^2 + P_b^2 + 2P_aP_b\cos C =$$
$$P_a^2 + P_b^2 - 2P_aP_b\cos(A+B) = P_a^2 + P_b^2 - 2P_aP_b[\cos A\cos B - \sin A\sin B]$$
$$= (P_a\sin B + P_b\sin A)^2 + (P_a\cos B - P_b\cos A)^2 \Rightarrow$$
$$DE = \sqrt{(P_a\sin B + P_b\sin A)^2 + (P_a\cos B - P_b\cos A)^2} \geq P_a\sin B + P_b\sin A \quad (*)$$

از طرفي چون چهارضلعي CDPE محاطي است پس طبق قضيه‌ي بطلميوس داريم:

$$DE \times PC = DC \times P_b + CE \times P_a \quad (**)$$

با استفاده از (**) داريم :

$$\sin C_1 = \frac{P_a}{PC},\ \sin C_2 = \frac{P_b}{PC},\ \cos C_1 = \frac{DC}{PC},\ \cos C_2 = \frac{CE}{PC}$$
$$\sin C = \sin(C_1+C_2) = \sin C_1\cos C_2 + \sin C_2\cos C_1 =$$
$$\frac{P_a}{PC}\cdot\frac{CE}{PC} + \frac{P_b}{PC}\cdot\frac{DC}{PC} = \frac{CE\times P_a + DC\times P_b}{PC^2} = \frac{DE\times PC}{PC^2}$$
$$\Rightarrow DE = PC\sin C \quad (***)$$

اکنون با استفاده از رابطه‌هاي (*) و (***) خواهيم داشت: $PC \geq \dfrac{P_a\sin B + P_b\sin A}{\sin C}$.

به روش مشابه مي‌توان نشان داد که: $PA \geq \dfrac{P_c\sin B + P_b\sin C}{\sin A}$, $PB \geq \dfrac{P_a\sin C + P_c\sin A}{\sin B}$.

بنابراين:

$$PA+PB+PC \ge \frac{P_c\sin B+P_b\sin C}{\sin A}+\frac{P_a\sin C+P_c\sin A}{\sin B}+\frac{P_a\sin B+P_b\sin A}{\sin C}=$$
$$P_a\left(\frac{\sin C}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin C}\right)+P_b\left(\frac{\sin C}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}\right)+P_c\left(\frac{\sin A}{\sin B}+\frac{\sin B}{\sin A}\right) \qquad (1)$$

لم: براي ۰<x ، $x+\frac{1}{x}\ge 2$ و تساوي وقتي و فقط وقتي رخ مي‌دهد كه x=۱.
اثبات لم به عنوان تمرين به خواننده واگذار مي‌شود.
پس با استفاده از لم و رابطه‌ي (۱) خواهيم داشت: $PA+PB+PC\ge 2(P_a+P_b+P_c)$.

و تساوي وقتي و فقط وقتي رخ مي‌دهد كه مثلث ABC متساوي‌الاضلاع بوده و P مركز ثقل آن باشد.

نكته:نامساوي اردوش-موردل در حالتي كه P روي مرز مثلث ABC باشد نيز برقرار است.

۳- نامساوي اويلر:
حكم: اگر R شعاع دايره محيطي و r شعاع دايره محاطي مثلث ABC باشند، آنگاه: $R\ge 2r$.
لم: اگر d فاصله‌ي مركز دايره‌ي محيطي و مركز دايره‌ي محاطي مثلث ABC باشد آنگاه: $d^2=R(R-2r)$.

براي ديدن اثباتي از اين لم مي‌توانيد به كتاب " بازآموزي و بازشناخت هندسه" ترجمه‌ي عبدالحسين مصحفي مراجعه نمائيد.
به وضوح، حكم با توجه به لم فوق نتيجه مي‌شود.

٤- نامساوي Hadwiger-Finsler:
حكم: اگر a,b,c اضلاع مثلث ABC و A مساحت آن باشند، آنگاه:

$$a^2+b^2+c^2\ge (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4A\sqrt{3}$$

پيش از پرداختن به اثبات حكم، مفهوم تابع محدّب را معرّفي مي‌كنيم:
تعريف: تابع $f: I\to R$ را محدّب گوئيم (I يك بازه است) هرگاه به ازاي هر x,y در I و هر λ $(0<\lambda<1)$ داشته باشيم:
$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

لم: اگر f تابعي محدّب و $x_1,x_2,\dots,x_n$ نقاط دلخواهي در دامنه‌ي f و اعداد دلخواه λ_i $(i=1,2,\dots,n)$ طوري باشند كه $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ آنگاه:

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n)\le \lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)+\dots+\lambda_nf(x_n)$$

اثبات لم با استقراء بر n .(جزئيات به عهده‌ي خواننده).
اثبات حكم: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha=(b-c)^2+2bc(1-\cos\alpha)$ كه در آن α زاويه‌ي بين ضلع‌هاي b,c است.
چون $A=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ پس :

$$a^2=(b-c)^2+4A\,\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=(b-c)^2+4A\,\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$
$$(b-c)^2+4A\tan\frac{\alpha}{2}$$

به روش مشابه می‌توان نشان داد که $b^2=(c-a)^2+4A\tan\frac{\beta}{2}$ و $c^2=(a-b)^2+4A\tan\frac{\gamma}{2}$ که در آن β ، γ به ترتیب زوایای بین ضلع‌های "a,c" , "a,b" هستند. بنابراین:

$$a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4A\left(\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\right)\ (*)$$

چون $0<\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\gamma}{2}<\frac{\Pi}{2}$ و $f(x)=\tan x$ در $(0,\frac{\pi}{2})$ محدّب است. [چرا؟]
پس طبق لم اخیر خواهیم داشت:

$$3\tan\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\leq\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}$$
$$\Rightarrow 3\tan\frac{\Pi}{6}\leq\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\Rightarrow\sqrt{3}\leq\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}\ (**)$$

با استفاده از (*) و (**) خواهیم داشت:

$$a^2+b^2+c^2\geq(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2+4A\sqrt{3}$$

و به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۵- نامساوي Weizenbock:
حکم: اگر a,b,c اضلاع مثلث ABC و A مساحت آن باشند، آنگاه:

$$a^2+b^2+c^2\geq 4A\sqrt{3}$$

اثبات: کافي است در نامساوي ٤ از این واقعیت که: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$ است، استفاده کنیم.

منابع:

http://Planetmath.org
http://mathdb.org
http://mathworld.wolfram.com