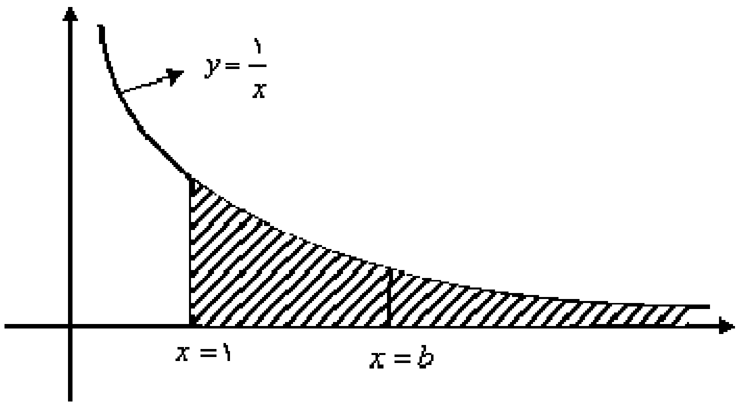
آيا جسمي با حجم متناهي مي تواند مقطعي با مساحت نامتناهي داشته باشد ؟

تابع حقیقی با ضابطه $x > 0$ ، $y = \frac{1}{x}$ را در نظر می گیریم و نمودار آن را در صفحه محورهای مختصات (مانند شکل ۱) رسم می کنیم .



شکل۱

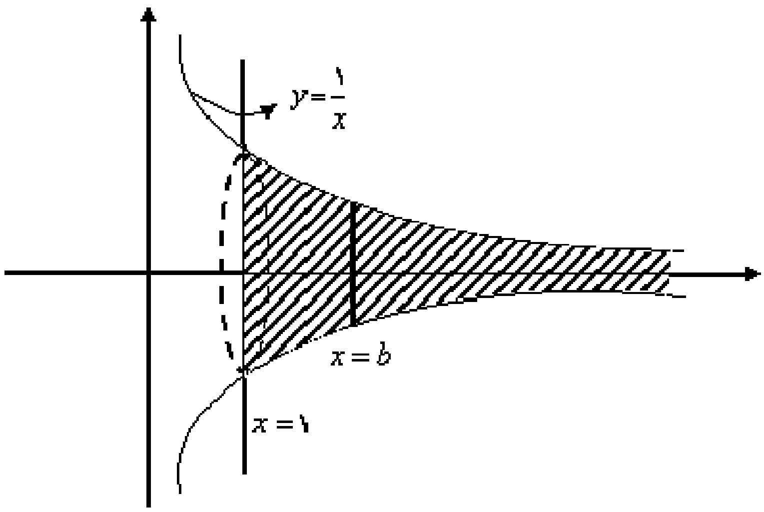
مرحله ي اول:سطح زیر منحنی به معادله ی $x \geq 1$ ، $y = \frac{1}{x}$ و محدود به محورx ها و خط $x = 1$ طبق رابطه ی زیر به دست می آید.

اندازه ي سطح A :

$$\lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \ln(x) \Big|_1^b = \lim_{b \to +\infty} (\ln b - \ln 1) = \lim_{b \to +\infty} (\ln b) = +\infty$$

پس مقدار سطح A نا متناهی است و اگر بخوا هیم این سطح را رنگ بزنیم ،با تمام رنگ های دنیا هم نمی توان این کار را انجام داد.

مرحله ي دوم:ما در این مرحله سطح نا متناهی A را حول محور x ها دوران می دهیم.جسمی که از این دوران به دست می آیدرا اصطلاحا" "شیپور گابریل" می گویند.(شکل ۲ را ببینید).



شکل۲

حجم جسم :

$$\lim_{b \to +\infty} \pi\int_{1}^{b} y^{2}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \pi\int_{1}^{b} \frac{1}{x^{2}}\,dx = \lim_{b \to +\infty} \pi\left(-\frac{1}{x}\right)_{1}^{b} = \lim_{b \to +\infty} \pi\left(-\frac{1}{b}+1\right) = \pi$$

این محاسبه نشان می دهد که این شیپور را با π واحد مکعب رنگ می توان پر از رنگ کرد.
مرحله ي سوم:ما در این مرحله این جسم را با صفحه ی محور های مختصات برش عرضی می زنیم.مسلما" با توجه به محاسبه ی مرحله ي دوم برای رنگ آمیزی این مقطع به مقداری کم تر از π واحد مکعب رنگ احتیاج داریم.
از طرفی این سطح مقطع دو برابر سطح نا متناهی A است،پس با توجه به مرحله ي اول حتی با تمام رنگ های دنیا هم نمی توان این سطح مقطع را رنگ آمیزی کرد.
این مطلب را چگونه توجیه می کنید!!!

منبع : مجله برهان