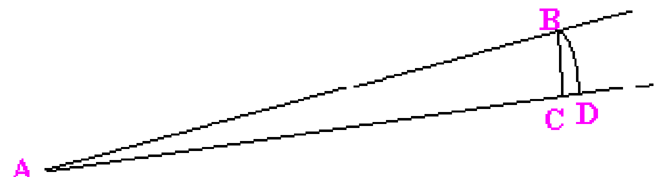
سينوس يك زاويه حاده چيست؟در مثلث قائم الزاويه سينوس زاويه حاده برابر است با:نسبت ضلع رو به رو به اين زاويه،بر وتر.
يك روش محاسبه براي زاويه هاي خيلي كوچك اين است كه نسبت قوس را به شعاع حساب كنيم.

مثلا" براي زاويه ۱ درجه داريم:(شكل ۱) $\frac{BD}{AB}$



(شكل 1)

كه قوس $BD=\frac{2\pi R}{360}$ است.و در آن π=۳/۱٤۱٥۹... است.و AB=R .

پس : $Sin1^\circ = \frac{2\pi R}{360 \cdot R} = \frac{\pi}{180} = 0/0175$.

و به همين ترتيب مي توان به دست آورد:

$Sin2^\circ = 0/0349$

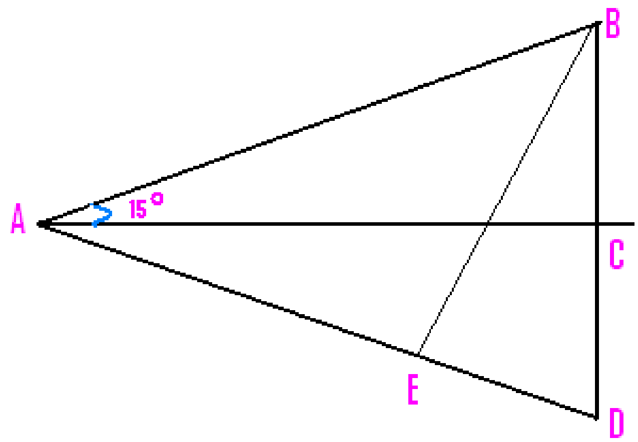
$Sin3^\circ = 0/0524$

$Sin4^\circ = 0/0698$

$Sin5^\circ = 0/0873$

حال اگر سينوس ۳۰ درجه را با روش فوق محاسبه كنيم ، عدد ۰/٥۲٤ را به جاي ۰/٥۰۰ به دست مي آوريم كه خطاي حاصل $\frac{24}{500}$ يعني قريب ٥% خواهد بود و اين بيش از اندازه زياد است. براي اين كه بتوانيم مرزي براي روش فوق پيدا كنيم سينوس زاويه ۱٥درجه را با دقت محاسبه مي كنيم:

با توجه به شكل ۲ داريم: $Sin15^\circ = \frac{BC}{AB}$



شکل۲

BC را به اندازه ي خودش تا نقطه ي D امتداد مي دهيم و سپس D را به A وصل مي كنيم. در اين صورت دو مثلث مساوي ADC و ABC و زاويه BAD مساوي ۳۰درجه به دست مي آيد. عمود BE را بر AD فرود مي آوريم ؛ مثلث قائم الزاويه BAE بازاويه ۳۰ درجه(زاويه BAE) به دست مي آيدو بنابراين $BE = \frac{AB}{۲}$ مي شود.

حال AE را از مثلث ABE طبق رابطه ي فيثاغورث به دست مي آوريم:

$$(AE)^۲ = (AB)^۲ - \left(\frac{AB}{۲}\right)^۲ = \frac{۳}{۴}(AB)^۲$$

$$AE = \frac{AB}{۲}\sqrt{۳} = ۰/۸۶۶AB \Rightarrow$$

$$ED = AD - AE = AD - ۰/۸۶۶AD = ۰/۱۳۴AD$$

حال در مثلث BED طول BD را محاسبه مي كنيم:

$$(BD)^۲ = (BE)^۲ + (ED)^۲ = \left(\frac{AB}{۲}\right)^۲ + (۰/۱۳۴AB)^۲ = ۰/۲۶۸(AB)^۲$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{۰/۲۶۸(AB)^۲} = ۰/۵۱۸AB \Rightarrow$$

$$BC = \frac{BD}{۲} = \frac{۰/۵۱۸AB}{۲} = ۰/۲۵۹AB$$

$$Sin ۱۵^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{۰/۲۵۹AB}{AB} = ۰/۲۵۹$$

اگر به سه رقم اعشار اكتفا كرده باشيم ، اين عدد، همان عددي است كه در جدول ها براي Sin ۱۵ ضبط شده است.

حالا اگر مقدار را با روش نسبت قوس بر شعاع محاسبه كنيم به عدد ۲٦۲ /۰ مي رسيم:با مقايسه دو عدد ۰/۲٦۲و۰/۲۵۹ مي بينيم كه اگر هر دو را تا دو رقم اعشار گرد كنيم به عدد ۰/۲٦ مي رسيم . خطاي حاصل از تبديل مقدار دقيق تر ۰/۲۵۹ به ۰/۲٦ مساوي $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ ،يعني قريب۰/٤% است. كه اين مقدار خطا براي محاسبه هاي عادي مانعي ندارد.

براي زاويه هاي بين ١٥ درجه و ٣٠ درجه مي توانيم از تناسب استفاده كنيم .به اين ترتيب استدلال مي كنيم كه اختلاف بين ٣٠ Sin و ١٥ Sin برابر است با :

$$۰/۵۰-۰/۲۶=۰/۲۴$$

با اضافه شدن يك درجه به زاويه،سينوس آن به اندازه $\frac{۱}{۱۵}$ اين اختلاف، يعني به اندازه $\frac{۰/۲۴}{۱۵}=۰/۰۱۶$ زياد مي شود.

خطاي اين روش $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ است كه در محاسبات تقريبي خود از آن صرف نظر مي كنيم .

به اين ترتيب با اضافه كردن ٠١٦/ ٠به سينوس ١٥ درجه به طور متوالي سينوس زاويه هاي ١٦، ١٧درجه و غيره به دست مي آيد:

$$Sin۱۶=۰/۲۶+۰/۰۱۶\cong۰/۲۸$$

$$Sin۱۷=۰/۲۶+۰/۰۳۲\cong۰/۲۹$$

.

.

.

$$Sin۲۵-۰/۲۶+۰/۱۶-۰/۴۲$$

به همين ترتيب مي توان سينوس زاويه هاي بين ٣٠ و ٤٥ درجه را محاسبه نمود.

$$Sin۴۵-Sin۳۰=۰/۷۰۷-۰/۵=۰/۲۰۷\rightarrow\frac{۰/۲۰۷}{۱۵}=۰/۰۱۴$$

اگر اين مقدار را مرتبا" به سينوس ٣٠ درجه اضافه كنيم به دست مي آيد:

$$Sin۳۱=۰/۵+۰/۰۱۴\cong۰/۵۱$$

$$Sin۳۲=۰/۵+۰/۰۲۸\cong۰/۵۳$$

.

.

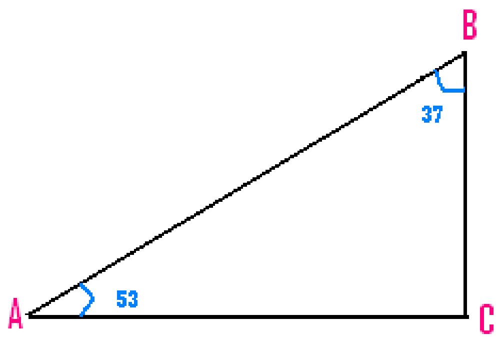
.

$$Sin۴۰=۰/۵+۰/۱۴=۰/۶۴$$

حال به محاسبه ي سينوس زاويه ي حاده ي بزرگ تر از ٤٥ درجه مي پردازيم:
براي اين منظور مي توان از قضيه ي فيثاغورث استفاده كرد.

فرض مي کنيم که بخوا هيم سينوس زاويه ۵۳ درجه را محاسبه کنيم:

بايد نسبت $\frac{BC}{AB}$ را به دست آوريم.(شکل۳)



شکل۳

چون۳۷=B درجه است،پس مي توان سينوس آن را به روش قبل محا سبه کرد:

$$Sin۳۷ = ۰/۵ + (۷ \times ۰/۰۱۴) = ۰/۶$$

از طرفي داريم : $SinB = \frac{AC}{AB}$

بنا بر اين: $\frac{AC}{AB} = ۰/۶ \Rightarrow AC = ۰/۶AB$ و لذا داريم :

$$(AB)^۲ = (AC)^۲ + (BC)^۲ \Rightarrow BC = \sqrt{(AB)^۲ - (AC)^۲}$$
$$= \sqrt{(AB)^۲ - (۰/۶AB)^۲} = AB\sqrt{۱ - ۰/۳۶} = ۰/۸AB$$

$$\Rightarrow \quad Sin۵۳^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{۰/۸AB}{AB} = ۰/۸$$

منبع : کتاب سرگرمي هاي هندسه
نوشته: ياکوب ايسيد ورويچ پرلمان