

# آزمون مدارک برتر ایران

به ابتکار دبیرستان انرژی اتمی ایران



آزمون شماره ۱  
۲۱ آذر ۱۳۹۳

پرسشنامه

المپیاد کامپیوتر

مدت آزمون: ۱۵۵ دقیقه

تذکرات:

پاسخ اشتباه نمره منفی دارد.  
استفاده از ماشین حساب مجاز است.

گروه طراحی و بازنگری: مهدی قاسمی - سروش عبادیان



۱. چند عدد ۴ رقمی وجود دارند که مضربی از ۷ باشند؟

- (۱) ۹۰۰ (۲) ۱۸۰۰ (۳) ۱۲۸۵ (۴) ۱۲۸۶ (۵) ۱۴۰۰

۲. چند عدد ۴ رقمی وجود دارد که رقم صفر نداشته باشد و مضربی از ۹ باشد؟

- (۱) ۱۰۰۰ (۲) ۷۲۹ (۳) ۱۴۵۸ (۴) ۲۱۸۷ (۵) ۶۹۳

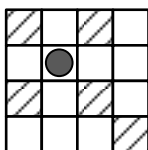
۳. در بانک عشقی (!) ۳ صف مختلف در بانک ایستاده‌اند. رئیس بانک در هر نوبت یک صف را به دلخواه انتخاب می‌کند و به کار نفر اول آن رسیدگی می‌کند. اگر طول ۳ صف به ترتیب ۲، ۳ و ۴ باشد، آقای رئیس به چند طریق می‌تواند به کار تمام مشتری‌ها رسیدگی کند؟

- (۱) ۱۸ (۲) ۱۶۲ (۳) ۱۴۵۸ (۴) ۱۲۶۰ (۵) ۱۴۵۸

۴. احسان اعداد ۱ تا ۳۵ را در مبنای ۳ نوشته است. او مجموعاً چند بار رقم ۲ را نوشته است؟ (مثلاً در عدد  $۲۰۲ = (۲۰۲)_۳$ ، ۲ بار رقم ۲ را نوشته است.)

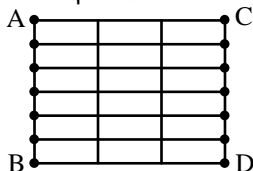
- (۱) ۳۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۷ (۴) ۴۲ (۵) ۳۳

۵. در یک جدول  $۳ \times ۳$  می‌خواهیم یک مهره فیل سفید و یک مهره فیل سیاه را قرار دهیم به طوری که همدیگر را تهدید نکنند. این کار به چند طریق مختلف ممکن است؟ (جدول قابلیت چرخش ندارد!) فیل در شطرنج به صورت اریب تهدید می‌کند. [به عنوان مثال اگر فیل در خانه‌ی علامت زده شده باشد تمامی خانه‌های هاشورخورده را تهدید می‌کند!]



- (۱) ۵۴ (۲) ۴۸ (۳) ۳۶ (۴) ۵۲ (۵) ۷۲

۶. به چند طریق می‌توانیم در جدول زیر از یک نقطه روی ضلع AB به یک نقطه روی ضلع DC برویم به طوری که فقط مجاز باشیم در جهت‌های راست و بالا حرکت کنیم؟

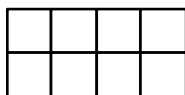


- (۱) ۴۶۲ (۲) ۸۴ (۳) ۱۶۸ (۴) ۴۵۰ (۵) ۳۳۶

۷. یک زیرمجموعه‌ی ناتهی را چاق می‌گوییم هر گاه هر عضو آن از تعداد اعضای آن بزرگتر باشد. به عنوان مثال زیرمجموعه‌ی  $\{۴, ۵, ۶\}$  یک زیرمجموعه‌ی چاق است ولی  $\{۲, ۳, ۵\}$  چاق نیست. مجموعه‌ی  $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۸\}$  چند زیرمجموعه‌ی چاق دارد؟

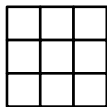
- (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۳۳ (۴) ۳۶ (۵) ۴۱

۸. به چند طریق می‌توان خانه‌های جدول روبه‌رو را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد به طوری که هیچ کدام از خانه‌های سطر پایینی هم‌رنگ نباشند؟



- (۱) ۶۴ (۲) ۳۲ (۳) ۹۶ (۴) ۴۸ (۵) ۱۶۲

۹. به چند طریق می‌توان اعداد ۹ و ... و ۱ را در جدول  $۳ \times ۳$  زیر قرار داد به طوری که جمع هر دو خانه‌ی مجاور عددی فرد باشد (دو خانه مجاورند اگر ضلع مشترک داشته باشند)؟



- (۱) ۱۸۸۰ (۲) ۵۷۶۰ (۳) ۵۱۸۴ (۴) ۲۵۹۲۰ (۵) هیچ‌کدام

۱۰. رستوران مش دونالد در هفته ۶ نوع غذای مختلف ارائه می‌دهد. منوی هفتگی رستوران چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟

- (۱)  $۷!$  (۲)  $۷ \times ۶ \times ۶!$  (۳)  $۳ \times ۷!$  (۴)  $۶^۷$  (۵)  $۷^۶$

۱۱. ۱۰ لامپ خاموش در یک ردیف، به ترتیب پشت سر هم قرار دارند. در هر مرحله، یکی از لامپ‌های خاموش را روشن می‌کنیم. این کار را آن قدر انجام می‌دهیم تا تمام لامپ‌ها روشن شوند. می‌خواهیم به ترتیبی لامپ‌ها را روشن کنیم که هیچ‌گاه بین لامپ‌های روشن، لامپ خاموش قرار نداشته باشد. به عنوان مثال اگر لامپ‌های اول و سوم روشن باشند لامپ دوم نیز حتماً روشن باشد. به چند طریق می‌توان ترتیبی برای روشن کردن لامپ‌ها ارائه داد، به طوری که شرط مذکور حفظ شود؟

- (۱) ۱۲۰ (۲) ۵۱۲ (۳) ۱۰۲۴ (۴) ۵۰۴۰ (۵) ۴۰۳۲۰



۱۲. اشکان و آرمین بازی زیر را با هم انجام می دهند:

۱۷ عدد سنگ ریزه روی میز قرار دارد. اشکان و آرمین هر کدام به نوبت و به دلخواه خود ۱ و یا ۲ سنگ ریزه را از روی میز برمی دارند. کسی بازی را می برد که پس از حرکت او دیگر سنگ ریزه‌ای باقی نمانده باشد. برنده‌ی بازی چه کسی است؟ (با فرض این که هر دوی آن‌ها به بهترین شکل ممکن بازی می کنند و بازی با حرکت اشکان شروع شده باشد)

- (۱) اشکان (۲) آرمین (۳) نمی توان تعیین کرد (۴) احتمال برد اشکان بیشتر است ولی قطعیت ندارد (۵) احتمال برد آرمین بیشتر است ولی قطعیت ندارد

۱۳. در یک مسابقه‌ی فوتبال ۱۰ تیم شرکت کرده اند. هر دو تیم یک بار با هم مسابقه می دهند. هر برد ۲ امتیاز هر مساوی ۱ امتیاز و باخت صفر امتیاز دارد. حداکثر اختلاف امتیاز برای دو تیم که رتبه‌های متوالی را کسب کرده اند چقدر می تواند باشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۵ (۵) ۱۸

۱۴. ۱۵ گلدان خالی را در یک ردیف چیده ایم. می خواهیم درون دقیقاً ۴ تا از گلدان‌ها گل بگذاریم به طوری که بین هر دو گلدان پر حداقل دو گلدان خالی وجود داشته باشد. به چند طریق می توانیم این کار را انجام دهیم؟

- (۱) ۷۴ (۲) ۱۲۶ (۳) ۳۵ (۴) ۱۴۰ (۵) ۱۳۶۵

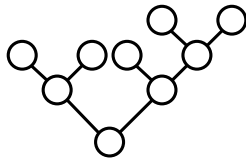
۱۵. اگر  $f$  یک تابع از اعداد صحیح و مثبت به اعداد صحیح و مثبت باشد که  $f(n+1) > f(n)$  و  $f(f(n)) = 2n$  مقدار  $f(9)$  چقدر است؟

- (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۱۶ (۵) ۱۸

۱۶. می خواهیم عدد ۷۲ را طی چند مرحله به عدد ۱ تبدیل کنیم. در هر مرحله مجازیم عددی که تا این مرحله به دست آمده را بر ۲ یا ۳ تقسیم کنیم. این کار به چند طریق ممکن است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲ (۵) ۱۵

۱۷. به چند طریق می توان اعداد ۱ تا ۹ را بدون تکرار در دایره‌های شکل زیر قرار داد به طوری که عدد هر دایره از دو عددی که در بالای آن قرار دارد کم تر باشد؟



- (۱) ۱۶ (۲) ۹۶ (۳) ۴۴۸ (۴) ۸۹۶ (۵) ۳۶۲۸۸۰

۱۸. چند عدد ۵ رقمی وجود دارد به طوری که رقم‌های آن از چپ به راست صعودی باشد؟ (مثلاً ۱۳۳۴۸)

- (۱) ۱۲۸۷ (۲) ۱۲۸۶ (۳) ۱۵۱۲۰ (۴) ۱۳۲۰ (۵) ۱۴۸۳

۱۹. آقای دکتر ظریف قرار است با وزرای خارجه ۵ کشور در یک جلسه دیدار کند. این ۶ نفر به چند طریق می توانند با هم دست بدهند به طوری که هر یک از وزرا با تعدادی زوج دست داده باشند؟ (صفر نیز زوج است!)

- (۱) ۲۵۶ (۲) ۵۱۲ (۳) ۷۲۰ (۴) ۰۲۴ (۵) ۱۲۶۰

۲۰. در برکه‌ای ۷ قطعه سنگ وجود دارد که از چپ به راست با اعداد ۱ تا ۷ شماره گذاری شده اند. قورباغه‌ای روی سنگ شماره ۱ نشسته است. فاصله‌ی سنگ‌ها به گونه‌ای است که اگر قورباغه روی سنگ شماره  $i$  باشد می تواند حداکثر تا  $i$  سنگ جلوتر ببرد. به چند طریق ممکن است قورباغه بدون برگشتن به سمت چپ، به سنگ شماره ۷ برود؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۱ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳ (۵) ۱۴

۲۱. دو نفر روی مبدأ محور  $X$  ایستاده اند. در هر مرحله هر کدام به طور مستقل یک واحد به چپ یا راست می روند. به چند طریق ممکن است بعد از ۵ مرحله هر دو نفر در یک امکان باشند؟

- (۱) ۷۰ (۲) ۱۲۷ (۳) ۱۹۷ (۴) ۲۵۲ (۵) ۲۵۶

۲۲. تعداد اعداد ۳ رقمی که مجموع ارقام آن‌ها برابر با ۱۵ باشد، چقدر است؟

- (۱) ۶۹ (۲) ۱۲۵ (۳) ۷۳ (۴) ۹۰ (۵) ۱۳۶

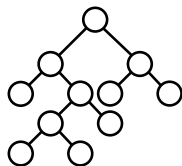
۲۳. خودرویی در فاصله‌ی ۱۰۰ کیلومتری از مقصد خود قرار دارد. روی این ماشین وسیله‌ای نصب است که در هر لحظه سرعت آن برابر است با فاصله‌ی باقی مانده تا مقصدش. مثلاً در شروع حرکت سرعت آن  $100 \frac{km}{h}$  و در لحظه‌ای که در فاصله‌ی  $30\sqrt{2}$  از مقصد است سرعتش

$$30\sqrt{2} \frac{km}{h}$$

- (۱) ۲ ساعت (۲) ۸ ساعت (۳) به مقصد نمی رسد (۴) پس از زمانی بسیار طولانی به مقصد می رسد (۵) ۱۰ ساعت

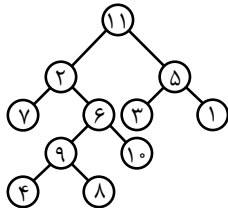


۲۴. شکل روبه‌رو یک درخت باینری است. رأس A ریشه‌ی آن و رأس B و C را فرزندان رأس A می‌گوییم. هر رأس دیگر این گراف صفر یا ۲ فرزند دارد. به چند حالت می‌توان اعداد ۱ تا ۱۱ را روی رئوس این درخت نوشت به طوری که عدد نوشته شده روی هر رأس از اعداد نوشته شده روی رئوس فرزندش کوچک‌تر باشد؟

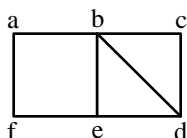


- (۱) ۱۷۲۸۰  
(۲) ۱۱۵۲۰  
(۳) ۴۰۳۲۰  
(۴) ۱۵۸۴۰  
(۵) ۱۳۲۰

۲۵. اعداد ۱ تا ۱۱ را به ترتیب روبه‌رو، روی رئوس نوشته شده‌اند. می‌خواهیم اعداد نوشته شده روی این رئوس را طوری جابه‌جا کنیم که به یکی از حالات مطلوب سؤال قبل تبدیل شود. برای این کار در هر مرحله می‌توانیم عدد نوشته شده روی هر رأس را با یکی از فرزندانش عوض کنیم. کمترین تعداد مراحل برای این که بتوانیم درخت را به یکی از وضعیت‌ها برسانیم برابر است با:



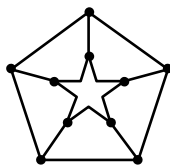
- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵  
(۴) ۶  
(۵) ۷



با توجه به توضیحات زیر به سؤالات ۲۶ تا ۳۰ پاسخ دهید.

در یک گراف فاصله‌ی دو رأس برابر است با تعداد یال‌های کوتاه‌ترین مسیر بین این دو رأس، به عنوان مثال در گراف شکل مقابل فاصله‌ی بین دو رأس a و d برابر ۲ است. بیشترین فاصله در گراف را قطر گراف می‌گوییم.

۲۶. در گراف روبه‌رو که به گراف پترسن معروف است، طول قطر گراف چقدر است؟



- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) ۴  
(۵) ۵

۲۷. در گراف سؤال قبل برای هر دو رأس فاصله‌ی آن دو رأس را در یک کاغذ یادداشت می‌کنیم. مجموع اعداد یادداشت شده در کاغذ چقدر است؟

- (۱) ۶۰  
(۲) ۷۵  
(۳) ۹۰  
(۴) ۹۲  
(۵) ۱۰۸

۲۸. به چند طریق می‌توان تعدادی از یال‌های گراف مسأله بالا را انتخاب کرد به طوری که هر رأس در انتهای یکی از یال‌ها ظاهر شده باشد؟

- (۱) ۴  
(۲) ۶  
(۳) ۸  
(۴) ۱۲  
(۵) ۱۶

۲۹. به ازای هر دنباله ۱۰ تایی از صفر و ۱، یک رأس در صفحه قرار داده‌ایم و هر دو رأس که دنباله‌های نظیر آن‌ها در یک رقم اختلاف داشته باشند با یال به هم وصل می‌کنیم. با رسم این گراف چند یال (پاره خط) به وجود می‌آید؟

- (۱)  $2^{10}$   
(۲)  $2^{10} \times 10$   
(۳)  $2^9 \times 10$   
(۴)  $2^9 \times 45$   
(۵)  $2^1 \times 45$

۳۰. در گراف تعریف شده در سؤال قبل اگر فاصله‌ی هر دو رأس را یادداشت کنیم، مجموع اعداد یادداشت شده برابر کدام گزینه است؟

- (۱)  $10 \times 2^{10}$   
(۲)  $10 \times 2^9$   
(۳)  $10 \times 4^{10}$   
(۴)  $10 \times 4^9$   
(۵)  $4^{10}$

آزمون مدارس برتر ایران

# المپیاد کامپیوتر

۲۰ آذر ۱۳۹۳

پاسخنامه آزمون ۱

شماره	۱	۲	۳	۴	۵
۱۶			■		
۱۷				■	
۱۸		■			
۱۹				■	
۲۰			■		
۲۱				■	
۲۲		■			
۲۳			■		
۲۴			■		
۲۵			■		
۲۶			■		
۲۷			■		
۲۸			■		
۲۹			■		
۳۰				■	

شماره	۱	۲	۳	۴	۵
۱			■		
۲				■	
۳			■		
۴	■				
۵			■		
۶					■
۷			■		
۸			■		
۹					■
۱۰			■		
۱۱					■
۱۲				■	
۱۳					■
۱۴					■
۱۵	■				