

مرحله اول یازدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

(۱) به چند طریق می‌توان از میان اعداد ۱ تا ۳۰، سه عدد متمایز انتخاب کرد، به طوری که تشکیل تصاعد هندسی دهند؟

- الف) ۶ (ب) ۱۰ (ج) ۱۱ (د) ۱۲ (ه) ۱۳

(۲) رقم‌های یک نظام عددی عبارتند از ۱ با ارزش یک، ۰ با ارزش صفر و ۱ با ارزش منفی یک (-۱). چند عدد چهاررقمی با مقادیر متمایز در این نظام عددی وجود دارد؟ مثلاً مقدار اعداد ۰۰۱۱ و ۱۱۱۱ هر دو برابر ۱- است (برای ۰۰۱۱، $-1 = 1 + 2 \times (-1) + 4 \times 0 + 8 \times 0$).

- الف) ۱۶ (ب) ۱۷ (ج) ۳۱ (د) ۳۲ (ه) ۸۱

(۳) با خواندن کلمات ۹ حرفی از حروف a و b از چپ به راست، با دیدن هر a دو گلوله در کاسه‌ای می‌اندازیم و با دیدن هر b ، یک گلوله از کاسه برمی‌داریم. در شروع کار کاسه خالی است. به ازای چند کلمه از کلمات ۹ حرفی پس از خواندن حرف نهم، کاسه خالی خواهد بود؟ (اگر در هنگام خواندن کلمه‌ای به حرف b برسیم و گلوله‌ای در کاسه نباشد تا آن را برداریم، آن کلمه در این شمارش محسوب نخواهد شد).

- الف) ۳ (ب) ۹ (ج) ۱۱ (د) ۱۲ (ه) ۱۵

(۴) تعداد جایگشت‌های اعداد ۱ تا ۱۰ که در آن به ازای هر i بین ۱ تا ۵، عدد $i - 1$ قبل (و نه لزوماً بلافاصله قبل) از عدد i آمده باشد کدام است؟

- الف) $\frac{10!}{5!5!}$ (ب) $\frac{10!}{2!}$ (ج) $\frac{10!}{5!}$ (د) $\frac{10!}{3!5!}$ (ه) ۵!

(۵) اگر S و T دو رشته از ۰ و ۱ باشند، ST رشته‌ای است که از نوشتن پشت سر هم این دو رشته به دست می‌آید. مثلاً اگر $S = ۱۰۱۰$ و $T = ۰۱۱$ باشد، $ST = ۱۰۱۰۰۱۱$ و $TS = ۰۱۱۱۰۱۰$. طول یک رشته تعداد ۰ و ۱‌های آن است. مثلاً طول رشته‌ی TS در مثال بالا ۷ است.

اگر B رشته‌ای از ۰ و ۱ و $A = ۱۰۱۱$ باشد به طوری که $AB = BA$ ، طول رشته‌ی B کدام می‌تواند باشد؟

- الف) ۱۳۷۸ (ب) ۱۳۷۹ (ج) ۲۰۰۱ (د) ۲۰۰۲ (ه) هیچ کدام

(۶) قد ۸ دانش‌آموز به نام‌های J, K, L, M, N, O, P, Q اندازه‌گیری شده است. می‌دانیم:

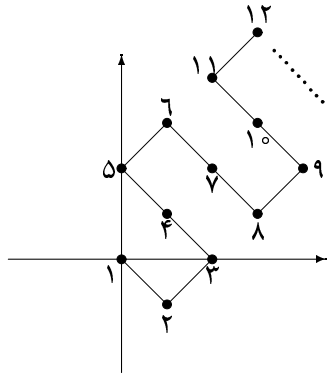
- هیچ دو نفری هم‌قد نیستند.
- قد L از M بلندتر و قد M از N بلندتر است.
- قد J از قد K بلندتر نیست.
- قد N از Q بلندتر و قد Q از J بلندتر است.
- قد O از قد P بلندتر نیست.
- L تنها از بلندقدترین فرد کلاس کوتاه‌تر است.

چند ترتیب مختلف از نظر قد برای این دانش‌آموزان وجود دارد؟

- الف) ۳۴ (ب) ۳۵ (ج) ۳۶ (د) ۳۸ (ه) ۳۹

(۷) تعداد زوج عددهای دودویی حداکثر ۷ رقمی که مجموع آن‌ها برابر ۱۰۱۰۱۰۱۰ است چه قدر است؟ دقت کنید که در این شمارش، مثلاً زوج عددهای ۱۰۱۰۰۰۰۰ و ۰۰۰۰۱۰۱۰ یک بار محسوب می‌شود.

- الف) ۴۲ (ب) ۴۳ (ج) ۴۴ (د) ۸۵ (ه) ۸۷



۸) اعداد ۱، ۲، ۳، و ... را مطابق شکل بر روی صفحه‌ی مختصات می‌نویسیم. این اعداد به ترتیب در مختصات $(0, 0)$ ، $(1, -1)$ ، $(2, 0)$ و ... قرار دارند. مختصات نقطه‌ی متناظر عدد ۱۳۷۹ چیست؟

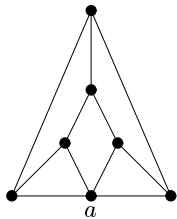
الف) (۴۵۸، ۴۶۰) ب) (۲۲۹، ۲۳۱) ج) (۴۵۹، ۴۶۱) د) (۹۱۶، ۹۱۸) ه) (۹۱۷، ۹۱۹)

۹) ۹ لامپ در سه ردیف سه‌تایی قرار دارند. آن‌ها را با رنگ‌های قرمز، سبز، آبی، و زرد رنگ می‌کنیم. می‌دانیم:

- در یک ردیف یا ستون، هیچ دو لامپی هم‌رنگ نیستند.
- لامپ وسط قرمز است.
- دقیقاً یک لامپ سبز است.

حداقل تعداد لامپ‌های آبی چند است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵



۱۰) به چند طریق می‌توان پاره‌خط‌های شکل مقابل را رنگ آمیزی کرد به گونه‌ای که هر دو پاره‌خط که در یک نقطه‌ی انتهایی اشتراک دارند ناهم‌رنگ باشند؟ پاره‌خط‌ها را می‌توان با رنگ‌های قرمز، آبی، و سبز رنگ آمیزی کرد و برای رنگ آمیزی پاره‌خط‌های متصل به رأس a می‌توان از رنگ زرد نیز استفاده کرد.

الف) صفر ب) ۱ ج) ۴ د) ۱۲ ه) ۲۴

۱۱) در زمان صفر، یک دوچرخه و دو نفر در نقطه‌ی A هستند. این دو نفر می‌خواهند به نقطه‌ی B در فاصله‌ی 1300 متری بروند. سرعت پیاده‌روی و سرعت دوچرخه‌سواری نفر اول به ترتیب 4 متر در ثانیه و 12 متر در ثانیه است. این سرعت‌ها برای نفر دوم به ترتیب 6 و 16 متر در ثانیه است. با فرض آن‌که در هر زمان فقط یک نفر می‌تواند سوار دوچرخه شود، جزء صحیح کم‌ترین زمان لازم برای این‌که هر دو نفر به نقطه‌ی B برسند چه قدر است؟

الف) ۱۵۰ ثانیه ب) ۱۶۳ ثانیه ج) ۱۷۵ ثانیه د) ۱۸۰ ثانیه ه) ۲۱۵ ثانیه

۱۲) ۶ نفر برای انتخاب در یک کمیته‌ی ۳ نفره نامزد شده‌اند. تعداد انتخاب‌کنندگان 30 نفر است و هر یک دقیقاً به ۳ نفر رأی داده است. نفرات منتخب به ترتیب ۲۶، ۲۲، و ۱۹ رأی آورده‌اند. حداقل چند نفر به هر سه عضو انتخاب‌شده رأی داده‌اند؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) هیچ‌کدام

۱۳) ۵ عدد چهار رقمی دودویی 1010 ، 0001 ، 0011 ، 1000 ، 0110 داده شده است. می‌توان یک عدد k رقمی A پیدا کرد که شامل همه‌ی این ۵ عدد باشد (مثلاً عدد 1010110011 فقط شامل 0011 ، 0110 ، و 1010 است). کمیته‌ی تعداد ارقام A (یعنی k) چند است؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۰ د) ۱۱ ه) ۱۲

۱۴) از هر کدام از هفت نفر به نام‌های A، B، C، D، E، F و G سؤال شد که چند نفر از بقیه را از قبل می‌شناسد. این افراد به ترتیب از A پاسخ دادند: ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۲، ۱ (یعنی به عنوان مثال C، ۴ نفر دیگر را می‌شناسد). می‌دانیم:

- حداکثر یک نفر دروغ گفته است.
 - دروغ‌گو تعداد افرادی که از قبل می‌شناسد را کم‌تر از مقدار واقعی می‌گوید.
 - شناختن یک رابطه‌ی دوطرفه است.
 - F حتماً راست گفته است.
- چه کسی حتماً دروغ گفته است؟

الف) D یا E (ب) E یا G (ج) C یا G (د) E یا C (ه) D یا G

۱۵) حسین و علی با یک سکه که یک روی آن سفید و روی دیگر سیاه است بازی می‌کنند، به طوری که هر بار سکه را به هوا می‌اندازند تا بر زمین افتد و رنگ ظاهر شده را یادداشت می‌کنند (می‌دانیم احتمال رو آمدن سیاه و سفید برابر است). اگر ۱۰ سفید متوالی بیاید، حسین و اگر یک سیاه و بلافاصله بعد از آن ۹ سفید متوالی بیاید، علی برنده می‌شود. بازی تا آن‌جا که یکی از دو نفر برنده شود ادامه می‌یابد. احتمال برد علی چقدر است؟

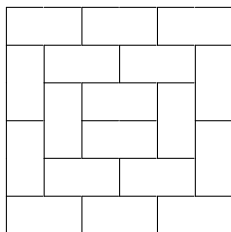
الف) کم‌تر از $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{9}{10}$ (ه) بیشتر از $\frac{9}{10}$

۱۶) یک دنباله از رقم‌های ۰ و ۱ را یک رشته می‌نامیم. رشته‌ی A را زیررشته‌ی B گوئیم اگر A از حذف تعدادی (صفر یا بیشتر) از رقم‌های ابتدایی و انتهایی B به دست آید. مثلاً هر کدام از رشته‌های ۰۱۱، ۰۱۱۰، ۱۰۱، و ۱۱۰، زیررشته‌ی ۰۱۱۰۱ هستند. اگر S یک رشته به طول حداکثر ۶ باشد، منظور از A_S مجموعه‌ی رشته‌های به طول ۶ است که S زیررشته‌ی آن‌ها نباشد. به ازای کدام یک از گزینه‌های زیر به عنوان S و T، $A_S \cup A_T$ ، ۲^۶ عضو دارد؟

الف) ۰۱۰۱ و ۱۱۱ (ب) ۱۰۱ و ۱۱۱ (ج) ۱۱۰۱۱ و ۱۰۱۱۰ (د) ۰۱۰۱ و ۱۱۱۰ (ه) «الف»، «ب» و «ج»

۱۷) یک جدول 9×9 از اعداد ۰ و ۱ داده شده است. می‌دانیم در هر چهار خانه‌ای که تشکیل یک مربع 2×2 بدهند حداقل ۲ و حداکثر ۳ بار عدد ۱ ظاهر شده است. حداقل و حداکثر تعداد یک‌های جدول چه قدر می‌تواند باشد؟

الف) ۴۱ و ۶۵ (ب) ۴۰ و ۶۱ (ج) ۳۶ و ۶۵ (د) ۴۰ و ۶۵ (ه) ۳۶ و ۶۱

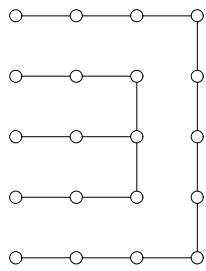


۱۸) می‌خواهیم k عدد کاشی 1×2 را روی کف یک اتاق 6×6 بگذاریم و از کودکی بخواهیم تا بقیه‌ی کف اتاق را با کاشی‌ها 1×2 کاملاً پر کند. برای این که کودک راهی جز چیدن کاشی‌ها به صورت شکل روبه‌رو نداشته باشد، حداقل k چند است؟

الف) ۲ (ب) ۳ (ج) ۴ (د) ۵ (ه) ۶

۱۹) مجموعه‌ی کلمات ۱ تا ۶ حرفی از حروف a و b را مانند کلمات لغت‌نامه مرتب می‌کنیم. ۲۹امین کلمه در این مجموعه‌ی مرتب کدام است؟ برای روشن شدن مفهوم مرتب کردن کلمات، مجموعه‌ی مرتب کلمات ۱ تا ۳ حرفی به ترتیب از چپ به راست برابر است با: $aaa, aab, ab, aba, abb, b, ba, baa, bab, bb, bba, bbb$. آن که نهمین کلمه در آن ba است.

الف) $baabba$ (ب) $abaaaa$ (ج) $baaabb$ (د) $baab$ (ه) bab



۲۰) امید و حمید با هم نقطه‌بازی می‌کنند. قاعده‌ی بازی به این صورت است که هر نفر در نوبت خود باید یک نقطه را به یک نقطه‌ی مجاور آن که قبلاً به آن وصل نشده، متصل کند و هرگاه یک نفر یک مربع 1×1 را کامل کرد، باید یک حرکت دیگر به‌عنوان جایزه انجام دهد (دو نقطه در صورتی مجاورند که فاصله‌ی آنها یک باشد). امتیاز یک فرد در انتهای بازی برابر تعداد مربع‌های 1×1 است که او کامل کرده است. نوبت حمید است که بازی کند و وضعیت بازی به شکل روبه‌رو است. در نهایت اگر هر نفر بهترین بازی خود را انجام دهد، بازی با چه نتیجه‌ای تمام می‌شود؟

- الف) ۱۰ بر ۲ به نفع امید
ب) ۸ بر ۴ به نفع امید
ج) ۴ بر ۸ به نفع حمید
د) ۳ بر ۹ به نفع حمید
ه) ۲ بر ۱۰ به نفع حمید

۲۱) یک جدول 12×12 داریم که در گوشه‌ی بالای سمت راست و پایین سمت چپ آن حرف O قرار دارد و گوشه‌ی بالای سمت چپ و همچنین پایین سمت راست آن با حرف X پر شده است. در قدم اول در خانه‌های مجاور خانه‌های شامل O ، حرف O قرار می‌دهیم و در قدم بعد در خانه‌های مجاور خانه‌های شامل X ، حرف X را می‌نویسیم (اگر این خانه قبلاً با حرف دیگری پر شده بود، حرف قبلی را پاک و حرف جدید را جای‌گزین می‌کنیم). این کار را متناوباً تکرار می‌کنیم. اگر در هر قدم تعداد O ها در جدول را با K نشان دهیم، حداکثر K چقدر است؟ (دو خانه را که یک ضلع مشترک دارند مجاور می‌نامیم.)

- الف) ۶۵
ب) ۷۲
ج) ۹۴
د) ۱۱۲
ه) ۱۲۴

۲۲) یک مکعب مشبک $2 \times 2 \times 2$ از ۸ «ریزمکعب» به ابعاد واحد تشکیل شده است. داخل هر ریزمکعب یک رقم صفر یا یک می‌نویسیم. وجه‌های این ریزمکعب‌ها که بر روی سطح مکعب قرار دارند را «وجه خارجی» می‌نامیم. یک وجه خارجی ریزمکعبی به نام A را در نظر می‌گیریم. به این وجه یک عدد ۲ رقمی دودویی نسبت می‌دهیم. رقم با ارزش‌ترین عدد رقم نوشته‌شده‌ی داخل ریزمکعب A و رقم دیگر آن رقم داخل ریزمکعب پشت A (نسبت به وجه خارجی مورد نظر) است. این کار را برای همه وجه‌های خارجی انجام می‌دهیم. بنابراین روی هر سطح مکعب ۴ عدد دودویی با مقدار بین ۰ تا ۳ دیده می‌شود. به چند طریق می‌توان عددهای داخل ریزمکعب‌ها را تعیین کرد به‌گونه‌ای که روی هر کدام از سطح‌های مکعب، ۴ عدد متمایز قرار بگیرند؟

- الف) ۰
ب) ۲
ج) ۴
د) ۸
ه) ۱۶

۲۳) افراد A_1, A_2, \dots, A_{11} به ترتیب ساعت‌گرد دور یک میز گرد نشسته‌اند. به ترتیب از هر کدام از این افراد می‌پرسیم که آیا نفری که سمت چپ آن فرد نشسته است، راست‌گوست یا دروغ‌گو؟ به ترتیب این جواب‌ها به دست آمد: د، ر، د، د، د، د، د، د، ر، ر، ر، ر، د (د = دروغ‌گو، ر = راست‌گو) با توجه به این که دروغ‌گوها همیشه دروغ می‌گویند و راست‌گوها همیشه راست، حداقل چند نفر دروغ‌گو در این جمع وجود دارد؟

- الف) ۳
ب) ۴
ج) ۵
د) ۶
ه) چنین وضعیتی نمی‌تواند پیش بیاید.

۲۴) سه ظرف ۳ لیتری داریم که در هر کدام ۱ لیتر آب وجود دارد. در هر حرکت یکی از ظرف‌ها را انتخاب می‌کنیم؛ مقدار $\frac{1}{3}$ آب درون آن را در یکی از دو ظرف دیگر و $\frac{1}{3}$ دیگر را در ظرف سوم می‌ریزیم و $\frac{1}{3}$ را در همان ظرف اول باقی می‌گذاریم. فرض کنید این کار را چند بار تکرار کنیم. در ظرف‌ها به ترتیب چه مقدار آب می‌تواند باشد؟

- الف) $\frac{27}{443}$ و $\frac{251}{443}$ و $\frac{401}{443}$
ب) $\frac{12}{81}$ و $\frac{89}{81}$ و $\frac{141}{81}$
ج) $\frac{41}{81}$ و $\frac{111}{81}$ و $\frac{91}{81}$
د) $\frac{247}{443}$ و $\frac{91}{443}$ و $\frac{291}{443}$
ه) $\frac{298}{443}$ و $\frac{129}{443}$ و $\frac{292}{443}$

(۲۵) دو نفر روی مبدأ محور x ایستاده‌اند. در هر مرحله هر کدام به طور مستقل یک واحد به چپ یا راست می‌روند. به چند طریق ممکن است بعد از ۵ مرحله هر دو نفر در یک مکان باشند؟

الف) ۷۰ (ب) ۱۲۷ (ج) ۱۹۷ (د) ۲۵۲ (ه) ۲۵۶

(۲۶) قرار است ۱۰۰ نفر معلم از بین ۴ دانش آموز به نام‌های A, B, C ، و D یکی را به روش «حذفی» انتخاب کنند. این کار با معرفی دو نفر از ۴ دانش آموز شروع می‌شود. معلمان رأی می‌دهند و فردی که رأی کمتری آورد حذف می‌شود. سپس بین فرد برنده و یکی از دو نفر دیگر رأی‌گیری می‌شود و در بار آخر بین برنده‌ی بار دوم و تنها نفر باقی‌مانده رأی‌گیری می‌شود تا برنده‌ی نهایی معین شود. مدیر مدرسه در هر مرحله دو دانش آموزی که به رأی گذاشته می‌شوند را انتخاب می‌کند. او قبلاً در یک نظرخواهی از معلمان می‌داند که آن‌ها به صورت زیر رأی خواهند داد:

$$۱۷ \text{ نفر} : C > A > D > B$$

$$۳۲ \text{ نفر} : A > B > D > C$$

$$۳۴ \text{ نفر} : D > B > C > A$$

$$۱۷ \text{ نفر} : B > A > C > D$$

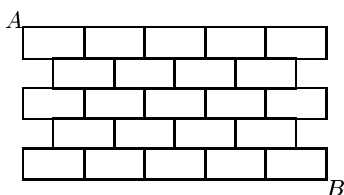
(به عنوان مثال ۳۴ نفر D را به B ، B را به C و C را به A ترجیح می‌دهند.)

مثلاً اگر A و B به رأی گذاشته شوند، B با اختلاف دو رأی برنده می‌شود. با این فرض که هیچ معلمی رأی خود را عوض نمی‌کند، مدیر مدرسه ممکن است بتواند به ترتیبی دانش آموزان را در هر مرحله به رأی بگذارد که دانش آموز مورد نظرش انتخاب شود. مدیر می‌تواند کاری کند که آخرین مرحله‌ی رأی‌گیری بین دانش آموزان زیر باشد:

الف) A و B (ب) C و D (ج) B و C (د) A و C (ه) همه‌ی حالت‌های ممکن

(۲۷) یک خط «سواپی» در مثلث، یک پاره‌خط از یک رأس مثلث به ضلع مقابل آن است. در مثلث ABC از رأس‌های A, B و C به ترتیب ۵، ۱۵ و ۱۰ خط سواپی رسم کرده‌ایم. اگر هیچ ۳ خطی در یک نقطه داخل مثلث هم‌دیگر را قطع نکنند، چند ناحیه در داخل مثلث به وجود می‌آید؟

الف) ۲۷۵ (ب) ۲۷۶ (ج) ۳۰۶ (د) ۷۵۰ (ه) ۱۰۵۶



(۲۸) در شکل روبه‌رو می‌خواهیم با پیمودن کوتاه‌ترین مسیر روی خطوط شبکه، از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برویم. این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

الف) ۱۰ (ب) ۲۸ (ج) ۳۲ (د) ۴۴ (ه) ۵۶

(۲۹) یک بازی کامپیوتری بین بازی‌کن و کامپیوتر روی یک شبکه‌ی $N \times M$ انجام می‌گیرد. کامپیوتر به جای یک دزد که در آغاز در خانه‌ی $(1, 1)$ قرار دارد بازی می‌کند و بازی‌کن به جای پلیس که در آغاز در خانه‌ی (N, M) قرار دارد بازی می‌کند. بازی بدین صورت انجام می‌گردد که در هر مرحله، نخست پلیس به یکی از خانه‌های مجاور خود (که با خانه‌ی فعلی یک ضلع مشترک دارد) می‌رود و سپس دزد با توجه به حرکت پلیس به یکی از خانه‌های مجاور خود می‌رود. اگر (و تنها اگر) پس از حرکت دزد، دزد و پلیس در یک سطر یا یک ستون قرار گرفتند پلیس می‌تواند دزد را مورد هدف قرار دهد و بازی پایان می‌پذیرد. در چند مورد از حالت‌های زیر از اندازه‌ی شبکه، کامپیوتر می‌تواند ببرد؟

۳×۵ ۵×۴ ۱۰×۱۰ ۸×۹

الف) ۰ (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۳ (ه) ۴

۳۰) چند کلمه‌ی ۸ حرفی از حروف a, b, c, d, e و f وجود دارد که در هر یک از آن‌ها دقیقاً دو نوع حرف متفاوت به کار رفته باشد؟

- الف) ۱۰۲۴ (ب) ۱۸۹۰ (ج) ۳۸۴۰ (د) ۳۸۱۰ (ه) ۱۵۳۶

۳۱) بر روی یک خط مستقیم دو قورباغه در دو نقطه به فاصله‌ی ۶۹۵۰ سانتی‌متر از هم نشسته‌اند. در هر «مرحله» هر قورباغه دریکی از دو جهت راست یا چپ و بر روی خط می‌جهد. می‌دانیم که طول جهش دو قورباغه در هر مرحله یکسان و برابر توانی از دو است (مثل ۱، ۲، ۴، ...) و جهش آن‌ها ممکن است در یک جهت نباشد. حداقل پس از چند مرحله، دو قورباغه در یک نقطه‌ی مشترک فرود می‌آیند؟

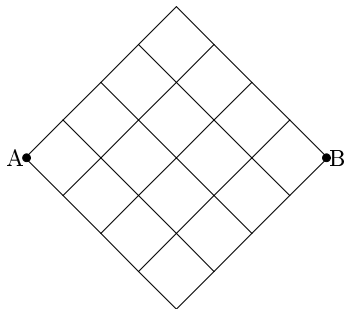
- الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸ (ه) ۱۰

۳۲) فرض کنید A مجموعه‌ی کلیه‌ی رشته‌های به طول ۸ از ۰ و ۱ باشد که در آن‌ها رشته‌ی ۰۰ نیامده باشد (در رشته‌ی ۰۱۰۱۱۰۰۱ رشته‌ی ۰۰ آمده ولی در ۱۱۰۱۰۱۱۰ رشته‌ی ۰۰ نیامده است) و B مجموعه‌ی کلیه‌ی رشته‌های به طول ۸ باشد که در آن ۱۱ نیامده باشد. $A \cup B$ چند عضو دارد؟

- الف) ۶۶ (ب) ۶۸ (ج) ۱۰۸ (د) ۲۵۴ (ه) ۲۵۶

۳۳) یک عدد دودویی n با ۱۳۷۹ رقم صفر و یک را در نظر بگیرید (ممکن است تعدادی از رقم‌های سمت چپ آن صفر باشد). با هر «عمل» یکی از ارقام این عدد را انتخاب می‌کنیم و آن را تغییر می‌دهیم (صفر به یک و یک به صفر تبدیل می‌شود). حداقل تعداد عمل‌هایی که پس از آن عدد حاصل بر ۳ بخش پذیر می‌شود را در نظر بگیرید. این تعداد را عدد بخش‌پذیری n می‌نامیم. در میان اعداد دودویی ۱۳۷۹ رقمی، بیشینه‌ی (ماکزیمم) عدد بخش‌پذیری چند است؟

- الف) ۱ (ب) ۲ (ج) ۳ (د) ۶۸۸ (ه) ۱۳۷۹



۳۴) دو شخص با نام‌های A و B در نقاط مشخص شده در شکل قرار دارند. شکل از مربع‌های واحد تشکیل شده است. در هر ثانیه A یک واحد به سمت راست و B یک واحد به سمت چپ روی خطوط حرکت می‌کنند. هرگاه دو راه در مقابل یک نفر وجود داشته باشد، با احتمال مساوی یکی از آن دو را انتخاب می‌کند. احتمال این که A و B در ۸ ثانیه‌ی اول در یک نقطه به هم برسند چه قدر است؟

- الف) $\frac{۲۵}{۳۵۶}$ (ب) $\frac{۳۰}{۳۵۶}$ (ج) $\frac{۳۵}{۳۵۶}$ (د) $\frac{۲۰}{۳۳۸}$ (ه) $\frac{۳۵}{۳۳۸}$

۳۵) یک روبات (آدم مصنوعی) روی صفحه‌ای نامتناهی قرار دارد. حرکت این روبات به گونه‌ایست که ابتدا یک «گام» به سمت بالا می‌رود، سپس یک گام به سمت راست، یک گام به پایین و یک گام به سمت چپ می‌رود (و همین کار را تکرار می‌کند: یک گام به بالا، ...). این روبات طوری برنامه‌ریزی شده است که طول گام‌های آن به ترتیب برابر ۱، ۲، ...، ۹، ۱، ۲، ... دسی‌متر باشد. روبات از نقطه‌ای شروع به حرکت می‌کند. پس از طی چند دسی‌متر دوباره به نقطه‌ی اولیه باز می‌گردد؟

- الف) ۴۵ (ب) ۹۰ (ج) ۱۳۵ (د) ۱۸۰ (ه) دیگر هیچ‌گاه به نقطه‌ی اولیه باز نمی‌گردد.

۳۶) اگر نمایش دودویی عدد W را از راست به چپ بنویسیم و صفرهای سمت چپ آن را حذف کنیم، عدد به دست آمده را W^R می‌نامیم (به عنوان مثال اگر $W = 110010 = 50$ ، آن‌گاه $W^R = 10011 = 19$). اگر بدانیم W دوازده برابر W^R است، W حداقل چند رقم دارد؟

الف) ۸ (ب) ۹ (ج) ۱۰ (د) ۱۱ (ه) هیچ کدام

۳۷) در روستایی دادوستد فقط به صورت مبادله‌ی اجناس صورت می‌گیرد. فرض کنید فقط ۴ جنس به نام‌های A تا D مبادله می‌شوند. یک مبادله را به صورت یک فرمول نشان می‌دهیم. مثلاً $3C \ 4D \leftrightarrow A \ B$ یعنی یک عدد جنس A و یک عدد جنس B را می‌توان با ۳ عدد جنس C و ۴ عدد جنس D مبادله کرد و برعکس. می‌دانیم که فقط مبادله‌های زیر مجاز هستند:

$$\begin{aligned} A &\leftrightarrow B \ D \\ B \ C &\leftrightarrow D \ A \\ 2B &\leftrightarrow 2D \\ C \ A &\leftrightarrow 2C \ 2D \end{aligned}$$

اگر یک نفر به تعداد کافی A در اختیار داشته باشد، بعد از یک سری مبادله تعداد D ، C و B هایی که در اختیار دارد، چند مورد از موارد زیر می‌تواند باشد؟ (۱) $6B \ 2D \ 4C$ (۲) $2C \ D$ (۳) $4D$ (۴) $2B \ 4C$

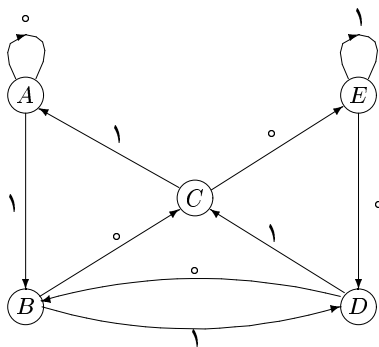
الف) هیچ مورد (ب) ۱ مورد (ج) ۲ مورد (د) ۳ مورد (ه) ۴ مورد

۳۸) ۱۰ نوع کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۰ و از هر کدام ۴ عدد داده شده است. این ۴۰ کارت را در هم می‌ریزیم و آن‌ها را به طور تصادفی در ۱۰ جعبه با شماره‌های ۱ تا ۱۰ قرار می‌دهیم (در هر جعبه ۴ کارت). سپس از جعبه‌ی شماره ۱ شروع می‌کنیم و یک کارت از درون آن برمی‌داریم. کارت مورد نظر را دور می‌اندازیم و از جعبه‌ای که شماره‌ی آن با شماره‌ی کارت برداشته شده یکسان است یک کارت برمی‌داریم. این روند را آن قدر تکرار می‌کنیم تا به جعبه‌ای برسیم که درون آن کارتی نباشد. احتمال این که شماره‌ی این جعبه ۱ باشد در کدام یک از بازه‌های زیر قرار می‌گیرد؟

الف) $[0, 1]$ (ب) $[0, 0.5]$ (ج) $[0, 0.25]$ (د) $[0, 0.1]$ (ه) $[0, 0.01]$

۳۹) در یک جدول 100×100 از ۰ و ۱، در هر مرحله به ازای یک عدد k ، همه‌ی اعداد سطر k ام را یک و سپس همه‌ی اعداد ستون k ام را صفر می‌کنیم. از یک جدول تمام صفر شروع می‌کنیم. ۱۰۹ مرحله، این عمل را روی جدول انجام می‌دهیم: در ۵۰ مرحله‌ی اول، به ازای k های زوج از ۲ تا ۱۰۰ و در ۵۰ مرحله‌ی بعد به ازای k های فرد از ۱ تا ۹۹ به ترتیب این کار را انجام می‌دهیم. سپس برای ۹ عدد دنباله‌ی ۱، ۱۳، ۱، ۹۷، ۷، ۵، ۲، ۴، ۱۰۰ و ۹۹ (از راست به چپ)، این کار را انجام می‌دهیم. عدد دودویی متناظر کدام سطر کم‌ترین مقدار را دارد؟

الف) ۳ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۹ (ه) ۹۸



الف) A (ب) B (ج) C (د) D (ه) E

۴۰) در نمودار مقابل از رأس A شروع می‌کنیم و با خواندن از چپ به راست رشته‌ی ورودی از رقم‌های صفر و یک، روی نمودار حرکت می‌کنیم. به عنوان مثال اگر رشته‌ی ورودی 01011 باشد، از A شروع می‌کنیم و به ترتیب به رأس‌های A, C, B, A می‌رویم (در B متوقف می‌شویم). اگر رشته‌ی دریافتی، عدد دودویی معادل عدد 137921142100 باشد، پس از دریافت آخرین رقم عدد دودویی (کم‌ارزش‌ترین رقم) در کدام رأس متوقف می‌شویم؟