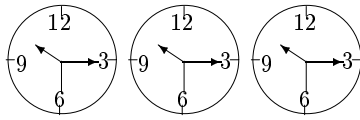


مرحله‌ی اول سیزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور

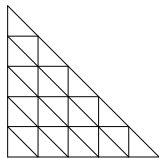
(۱) سه ساعت با صفحه‌ی دوار به نام‌های A، B، و C داریم که هر سه ساعت $۱۰:۱۵:۳۰''$ را نشان می‌دهند (مانند شکل مقابل). در ساعت A، ثانیه‌شمار تکان نمی‌خورد ولی صفحه (مستقل از عقربه‌ها) و ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار طوری حرکت می‌کنند که ساعت هر لحظه زمان درست را نشان می‌دهد.



در ساعت B، دقیقه‌شمار تکان نمی‌خورد، ولی صفحه (مستقل از عقربه‌ها) و ساعت‌شمار و ثانیه‌شمار طوری حرکت می‌کنند که ساعت هر لحظه زمان درست را نشان می‌دهد. در ساعت C، ساعت‌شمار تکان نمی‌خورد، ولی صفحه (مستقل از عقربه‌ها) و دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار طوری حرکت می‌کنند که ساعت هر لحظه زمان درست را نشان می‌دهد. فرض کنید ۵۰ ساعت از وضعیت داده شده گذشته است. در این مدت، چند بار وضعیت این سه ساعت کاملاً مشابه است (یعنی صفحه و ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار و ثانیه‌شمار در هر سه ساعت در یک وضعیت قرار دارند)؟ حالت اولیه را نیز یک وضعیت مشابه به حساب آورید.

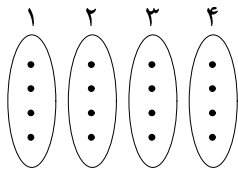
- الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

(۲) در شکل مقابل به دل‌خواه در یکی از خانه‌های مثلثی شکل یک مهره قرار می‌دهیم. در هر حرکت می‌توان این مهره را از خانه‌ی فعلی آن برداشت و پس از طی یک مسیر در یک خانه‌ی جدید گذاشت. این مسیر باید طوری باشد که دقیقاً یک پاره‌خط افقی، یک پاره‌خط عمودی و یک پاره‌خط مورب را قطع کند. این مهره در هر خانه‌ای که قرار بگیرد آن را سیاه می‌کند. توجه کنید که این مهره خانه‌هایی را که در طول مسیر از آن‌ها عبور می‌کند سیاه نمی‌کند. اگر شکل در ابتدا کاملاً سفید باشد، پس از ۲۰ بار حرکت، حداکثر چند خانه را می‌توان سیاه کرد؟



- الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸ ه) ۹

(۳) می‌خواهیم هر نقطه موجود در دسته‌ی i در شکل مقابل را با یک پاره‌خط به دقیقاً یک نقطه در دسته‌ی $i+1$ وصل کنیم ($i \leq 3$) به طوری که هیچ دو نقطه‌ای از دسته‌ی i ام به یک نقطه از دسته‌ی $i+1$ ام وصل نباشند. هم‌چنین می‌خواهیم هر نقطه موجود در دسته‌ی ۴ را با یک پاره‌خط به دقیقاً یک نقطه در دسته‌ی ۱ وصل کنیم به طوری که هیچ دو نقطه‌ای از دسته‌ی ۴ به یک نقطه از دسته‌ی اول وصل نباشند. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟



- الف) $۴^۳ \times ۲^۴ \times ۳^۴$ ب) $۴^۴ \times ۲^۴ \times ۳^۴$ ج) $۴^۲ \times ۲^۲ \times ۳^۵$ د) $۴^۲ \times ۲^۵ \times ۳^۳$ ه) $۴^۴ \times ۲^۲ \times ۳^۳$

(۴) جای‌گشت ۱۲۳۴۵۶ را در نظر بگیرید. در یک حرکت می‌توانیم جای دو عدد i و z را با هم عوض کنیم اگر $۲ \leq |i-z|$. پس از انجام چند حرکت به جای‌گشت $\pi = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5 p_6$ می‌رسیم. π کدام یک از گزینه‌های زیر می‌تواند باشد؟

- الف) ۶۵۴۳۲۱ ب) ۲۱۳۴۵۶ ج) ۴۳۱۲۶۵ د) ۳۲۴۶۱۵
ه) تمام گزینه‌های فوق می‌تواند باشد

۵) سه دستور A ، B و C داده شده‌اند که هرکدام به عنوان ورودی زوج مرتب (x, y) را می‌گیرد و خروجی زیر را تولید می‌کند:

- دستور A خروجی با مقدار $(x + 3, y)$ را تولید می‌کند.
- دستور B خروجی با مقدار $(x, y - 2)$ را تولید می‌کند.
- دستور C خروجی با مقدار (y, x) را تولید می‌کند.

به تعدادی دستور پشت سر هم یک «برنامه» می‌گوییم. هر برنامه به عنوان ورودی زوج مرتب (x, y) را می‌گیرد و خروجی آن به صورت زیر تعیین می‌شود: دستور اول بر روی ورودی اجرا می‌شود، سپس دستور دوم خروجی دستور اول را به عنوان ورودی دریافت می‌کند و اجرا می‌شود، ... دستور $i + 1$ ام خروجی دستور i ام را به عنوان ورودی دریافت می‌کند و اجرا می‌شود. خروجی برنامه، خروجی دستور آخر است. به طور مثال برنامه‌ی AAC را در نظر بگیرید که ورودی آن $(1, 2)$ است. خروجی این برنامه $(2, 7)$ خواهد بود (دستورها از چپ به راست اجرا می‌شوند). فرض کنید یک برنامه داریم که ورودی آن $(2, 1)$ و خروجی آن $(8, 5)$ است. حداقل تعداد دستورهای این برنامه چند تاست؟

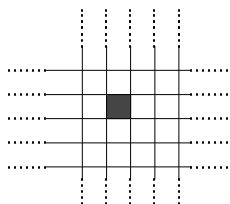
- الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸ (ه) ۹

۶) همان سؤال قبل، با این تفاوت که خروجی دستورهای A ، B و C به صورت زیر است:

- دستور A خروجی $(x + 1, y)$ را تولید می‌کند.
- دستور B خروجی $(x, y + 1)$ را تولید می‌کند.
- دستور C خروجی (y, x) را تولید می‌کند.

تعداد برنامه‌هایی را پیدا کنید که از دستور C دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و به ازای ورودی $(0, 0)$ خروجی $(2, 2)$ را تولید کند.

- الف) ۶ (ب) ۱۸ (ج) ۲۴ (د) ۳۰ (ه) ۳۲



۷) یک جدول 2 بعدی نامتناهی را در نظر بگیرید که در ابتدا تمام خانه‌های آن سفید است. در مرحله‌ی اول یکی از خانه‌های آن را به دل خواه سیاه می‌کنیم (شکل مقابل). از مرحله دوم به بعد، در هر مرحله کلیه‌ی خانه‌هایی که 1 ، 2 و 3 همسایه سیاه دارند را مشخص می‌کنیم و سپس همه‌ی آن‌ها را سیاه و بقیه‌ی خانه‌ها را سفید می‌کنیم. (دو خانه مجاورند اگر ضلع مشترکی داشته باشد).

بزرگ‌ترین k ای را پیدا کنید که خانه‌ای که در مرحله اول سیاه شده بود در مرحله‌ی k ام هم سیاه شود.

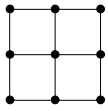
- الف) ۱ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۱۶ (ه) k هر قدر می‌تواند بزرگ باشد.

۸) تعداد زیرمجموعه‌های $\{1, 2, \dots, 10\}$ که مجموع اعضای آن بر 8 بخش پذیر چند تاست؟

- الف) ۱۲۵ (ب) ۱۲۶ (ج) ۱۲۷ (د) ۱۲۸ (ه) ۱۲۹

۹) عدد k عدد رخ را در یک صفحه‌ی شطرنجی 10×10 طوری قرار داده‌ایم که تمام صفحه را تهدید کنند. یک رخ در خانه‌ی (x, y) ، همه‌ی خانه‌های سطر x و ستون y را تهدید می‌کند. هم‌چنین می‌خواهیم که هر رخ دقیقاً توسط 4 رخ دیگر تهدید شود. حداقل k چند است؟

- الف) ۹ (ب) ۱۰ (ج) ۱۳ (د) ۱۶ (ه) ۲۴



۱۰) نقشه‌ی یک استان در شکل مقابل نشان داده شده است که در آن هر نقطه یک شهر و هر خط یک جاده بین دو شهر است. فاصله‌ی دو شهر A و B برابر است با حداقل تعداد جاده‌هایی که باید طی کنیم تا از A به B برسیم. یک دزد در یکی از این شهرها که از قبل مشخص نیست مخفی شده است. برای پیدا کردن این دزد مجاز هستیم به صورت زیر عمل کنیم.

• در ابتدای هر روز یکی از شهرها به نام A را انتخاب و آن را جست‌وجو می‌کنیم. اگر دزد در آن شهر بود که او را دست‌گیر می‌کنیم. ولی اگر نبود به کمک دستگاهی فاصله‌ی شهر A تا شهری که دزد در آن قرار دارد را پیدا می‌کنیم.

• در انتهای هر روز دزد از شهری که در آن قرار دارد به یکی از شهرهای مجاور آن می‌رود (دو شهر را مجاور گوئیم اگر با یک جاده به هم متصل باشند). دقت کنید که دزد حتماً جای خود را عوض می‌کند.

حداقل به چند روز نیاز داریم تا مطمئن باشیم که دزد را دست‌گیر می‌کنیم؟

- الف) ۶ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۹ (ه) با گذشت هر چند روز نمی‌توان مطمئن بود که دزد را پیدا کرده‌ایم.



۱۱) همان سؤال قبل اگر نقشه‌ی استان به صورت مقابل باشد.

- الف) ۴ (ب) ۵ (ج) ۶ (د) ۷ (ه) با گذشت هر چند روز نمی‌توان مطمئن بود که دزد را پیدا کرده‌ایم.

۱۲) در خانه‌ی $(0, 0)$ جدول مختصات عدد ۱ را می‌نویسیم. فرض کنید در ابتدای هر مرحله در خانه‌ی (x, y) عدد i نوشته شده است. در آن مرحله i را پاک می‌کنیم و یکی از چهار حرکت زیر را انجام می‌دهیم:

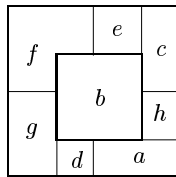
- در خانه‌ی $(x + 1, y)$ عدد $4i$ را می‌نویسیم؛
- در خانه‌ی $(x, y + 1)$ عدد $4i + 1$ را می‌نویسیم؛
- در خانه‌ی $(x - 1, y)$ عدد $4i + 2$ را می‌نویسیم؛ یا
- در خانه‌ی $(x, y - 1)$ عدد $4i + 3$ را می‌نویسیم.

پس از انجام چند مرحله متوجه می‌شویم در خانه $(1, 1)$ عدد K نوشته شده است. K کدام گزینه می‌تواند باشد؟

- الف) ۶۰۳۹ (ب) ۱۰۸۲ (ج) ۱۳۴۷ (د) ۵۱۳۲ (ه) ۵۹۲۱

۱۳) کامران یک دستگاه عددشمار ساخته است که ۷ لامپ دارد. معنی روشن یا خاموش بودن لامپ i ام به ترتیب ۱ یا ۰ بودن رقم i ام یک عدد ۷ رقمی در مبنای ۲ است. مثلاً اگر فقط لامپ سوم روشن باشد دستگاه عدد ۸ را نمایش می‌دهد. در ابتدا همه‌ی لامپ‌ها خاموش هستند. این دستگاه دکمه‌ای دارد که با فشار آن عدد دستگاه یک واحد افزایش می‌یابد. کامران با ۶۴ بار فشار دادن دکمه عدد اولیه‌ی صفر را به ۶۴ تبدیل می‌کند. اگر d_i برابر با تعداد دفعاتی باشد که لامپ i ام تغییر وضعیت داده است، $\sum_{i=1}^7 d_i$ برابر چه مقدار است؟

- الف) ۱۲۹ (ب) ۱۲۷ (ج) ۶۱ (د) ۶۵ (ه) ۶۴



۱۴) ۸ مربع هم‌اندازه با رنگ‌های a, b, \dots, h را یکی پس از دیگری در یک صفحه چیده‌ایم (هر مربع بر روی مربع‌های قبلی قرار می‌گیرد) و شکل مقابل حاصل شده است. اگر مربع با رنگ a را A بنامیم، و مربع با رنگ b را B و \dots به چه ترتیبی این مربع‌ها را چیده‌ایم؟

- الف) F و C, H, B, A, G, D, E
 ب) B و F, E, C, H, A, D, G
 ج) B و F, G, D, A, H, C, E
 د) B و G, D, A, H, C, E, F
 ه) B و F, C, E, A, H, G, D

۱۵) همه‌ی رشته‌های تولید شده از حروف a و b را به ترتیب طول رشته و در صورت مساوی بودن طول‌ها به ترتیب الفبایی مرتب می‌کنیم. مثلاً هشت رشته‌ی اول عبارتند از: $a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab$. رشته‌ی ۱۳۸۱ ام کدام است؟

- الف) $ababbaabba$
 ب) $bababbbab$
 ج) $ababbaabab$
 د) $babaabbaab$
 ه) $ababaaaba$

۱۶) ۲۰ عدد کاسه داریم که در هر یک می‌توانیم یک پنج تومانی قرار دهیم یا آن را خالی بگذاریم. هم‌چنین ۱۰ کاسه‌ی دیگر داریم که در هر یک می‌توانیم یک ۲ تومانی قرار دهیم یا آن را خالی بگذاریم. به چند طریق می‌توانیم در این کاسه‌ها، سکه‌هایی ۵ تومانی و ۲ تومانی قرار دهیم تا مجموع سکه‌های موجود در کاسه‌ها ۸۱ تومان شود؟

- الف) $\binom{20}{15} + \binom{20}{12} + \binom{10}{3} + \binom{10}{8}$
 ب) $\binom{20}{15} \times \binom{10}{3} \times \binom{10}{8}$
 ج) $\frac{15! + 8 \times 13! \times 14}{20!}$
 د) $\binom{13}{8} + \binom{15}{3}$
 ه) $\binom{20}{15} \times \binom{10}{3} + \binom{20}{12} \times \binom{10}{8}$

۱۷) منظور از یک زیر دنباله تعدادی عدد پشت سر هم از یک دنباله است. مثلاً $(2, 3, 4)$ زیر دنباله‌ی $(1, 2, 3, 4, 5)$ هست ولی $(1, 4, 5)$ زیر دنباله‌ی آن نیست. هم‌چنین یک زیر دنباله مضرب پنج است اگر جمع اعضای آن مضرب پنج باشد. مثلاً (5) یا $(1, 2, 3, 4)$ زیر دنباله‌های مضرب ۵ از $(1, 2, 3, 4, 5)$ هستند ولی $(1, 2, 3)$ مضرب ۵ نیست. تعداد زیر دنباله‌های ناتهی مضرب ۵ دنباله‌ی $(1, 1, 1, 1, 1, 3, 8, 1, 1, 3, 1, 3, 0, 3, 0, 2)$ چه قدر است؟

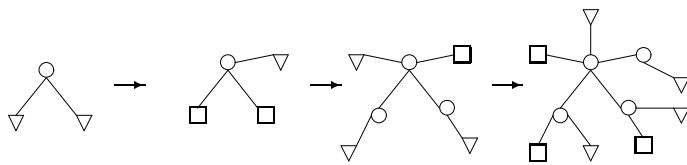
- الف) ۴
 ب) ۱۸
 ج) ۲۲
 د) ۲۴
 ه) ۲۶

۱۸) یک سالن با ۱۰۳ ردیف صندلی داریم که در هر ۵ ردیف متوالی آن در مجموع ۲۰۰ نفر نشسته‌اند. در این سالن حداقل و حداکثر چند نفر نشسته‌اند؟

- الف) $4200/4000$
 ب) $4200/4120$
 ج) $4120/4000$
 د) $4120/4120$
 ه) چنین حالتی ممکن نیست.

۱۹) اگر f یک تابع از اعداد صحیح و مثبت به اعداد صحیح و مثبت باشد که $f(n+1) > f(n)$ و $f(f(n)) = 3n$. مقدار $f(9)$ چه قدر است؟

- الف) ۹
 ب) ۱۰
 ج) ۱۲
 د) ۱۶
 ه) ۱۸



۲۰) طبق قواعد زیر هر شکل از شکل قبل به این صورت ساخته می‌شود:

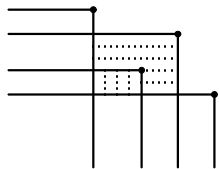
- * هر مربع تبدیل به دایره می‌شود.
- * هر مثلث تبدیل به مربع می‌شود.

* در پایان، به ازاء هر دایره (حتی دایره‌های جدید)، یک مثلث جدید می‌کشیم و به آن دایره وصل می‌کنیم.

در بالا چهار شکل اول این سری را نشان داده‌ایم. شکل یازدهم چند تا مثلث دارد؟

- الف) ۸۹ (ب) ۹۰ (ج) ۱۲۱ (د) ۱۲۳ (ه) ۱۲۵

۲۱) یک ریاضی‌دان در دفتر کار خود یک تخته سیاه خیلی بزرگ دارد. روزی پسرش از وی خواست تا با او بازی کند. ریاضی‌دان که به بازی‌های کودکانه چندان آشنایی نداشت، به فرزندش پیشنهاد کرد بازی «رولینگ» را انجام دهند. ریاضی‌دان به پسرش گفت که در این بازی، پسر با گچ یک نقطه روی تخته بگذارد و سپس ریاضی‌دان از آن نقطه دو نیم‌خط رسم کرد: یک نیم‌خط افقی از نقطه به سمت چپ و یک نیم‌خط عمودی از نقطه به پایین.



پسر که از این بازی کلافه شده بود از پدرش خواست تا یک بازی دیگر مثل «کوئیدیچ» را بازی کنند، ولی ریاضی‌دان برای آن که پسرش راضی شود به او گفت: «اگر بتوانی با انتخاب ۷ نقطه بیشترین ناحیه‌های بسته را ایجاد کنی تو را به تماشای مسابقه‌ی کوئیدیچ خواهیم برد». یک ناحیه‌ی بسته، ناحیه‌ای از تخته است که دور تا دور آن به وسیله‌ی نیم‌خط‌ها بسته شده باشد. مثلاً در شکل مقابل با انتخاب ۴ نقطه، دو ناحیه‌ی بسته ایجاد کرده‌ایم که با هاشور مشخص شده‌اند.

پسر با انتخاب ۷ نقطه حداکثر چند ناحیه‌ی بسته می‌تواند ایجاد کند؟

- الف) ۱۰ (ب) ۱۲ (ج) ۱۵ (د) ۱۸ (ه) ۲۰

۲۲) یک قورباغه روی نقطه‌ی صفر محور مختصات نشسته است. این قورباغه می‌تواند به سمت جلو بجهد، ولی طول پرش آن در n امین جهش به دل‌خواه خودش i یا $i + 1$ واحد است. او پس از چند جهش می‌تواند به نقطه‌ی ۱۳۸۱ برسد؟ و چند جهش دیگر لازم است تا از آن جا به نقطه‌ی ۲۰۰۳ برسد؟

- الف) ۵۲ و ۱۱ (ب) ۵۲ و ۱۲ (ج) ۵۲، نمی‌تواند برسد (د) ۳۷ و ۹ (ه) به هیچ‌کدام نمی‌تواند برسد.

۲۳) یک بازی دو نفره بر روی عبارت $(?) * (?) * (?)$ انجام می‌شود. در این عبارت به جای هر علامت $?$ باید یکی از اعداد ۰، ۱ یا ۲ (به صورت غیر تکراری) و به جای $*$ یکی از عملگرهای \times (ضرب) یا $+$ (جمع) قرار گیرد. بازی به این صورت است: نفر اول یکی از اعداد را برای اولین $?$ ، سپس نفر دوم یک عملگر و یک عدد برای $*$ بعدی، در مرحله‌ی آخر نفر اول همین کار را برای $*$ بعدی انجام می‌دهد. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

- الف) نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که عدد حاصل زوج شود.
- ب) نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که عدد حاصل زوج شود.
- ج) نفر اول می‌تواند طوری بازی کند که عدد حاصل فرد شود.
- د) نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که عدد حاصل فرد شود.
- ه) هر دو گزینه‌های الف و ب درست‌اند.

۲۴) ۱۰ سکه دور دایره‌ای چیده شده‌اند که یک درمیان شیر (H) و خط (T) هستند. در هر مرحله می‌توانیم هر سه تا سکه پشت سر هم را که HTH یا THT باشند انتخاب کنیم و هر سه را برگردانیم. با تکرار این کار، حداکثر چه تعداد H می‌توانیم داشته باشیم؟

الف) ۵ (ب) ۶ (ج) ۷ (د) ۸ (ه) ۹

۲۵) عبارت بدون پرانتز $a - b/c * d + e$ را در نظر بگیرید. می‌دانیم که مقدار این عبارت برابر است با $x = ((a - ((b/c) * d)) + e)$. به چند طریق می‌توان این عبارت را پرانتزگذاری کرد که به‌ازای همه‌ی مقادیر a تا e ، حاصل آن همان مقدار x باشد؟ در عبارت پرانتزگذاری شده به‌ازای هر عملگر حداکثر یک جفت پرانتز می‌توان گذاشت، مثلاً $a + ((b/c)) * d + e$ حاوی یک جفت پرانتز اضافه است.

الف) ۱۶ (ب) ۳۲ (ج) ۱۸ (د) ۲۴ (ه) ۸

۲۶) مجموعه‌ی S «دوستانه» است اگر برای هر $x \in S$ حداقل یکی از $x + 1$ و $x - 1$ هم در S باشد. مثلاً $\{1, 2, 499, 500\}$ دوستانه است. چه تعداد مجموعه‌ی دوستانه با ۵ عضو از اعداد ۱ تا ۱۰۰ داریم؟

الف) ۴۶۵۶ (ب) ۹۲۰۸ (ج) ۹۲۱۶ (د) ۱۰۰۰۰ (ه) ۱۸۳۳۶

۲۷) ۷ تا کره‌ی یک شکل و یک رنگ داریم که که از جنس‌های متفاوت ساخته شده‌اند. می‌دانیم که حداقل ۴ تا از این کره‌ها از یک جنس هستند (به این جنس، «غالب» می‌گوییم). دو تا کره را برمی‌داریم و به هم می‌چسبانیم، اگر از یک جنس باشند جرقه می‌زند، در غیر این صورت اتفاقی نمی‌افتد. با حداقل چند بار چسباندن کره‌ها به هم مطمئناً می‌توان یک کره پیدا کرد که از جنس غالب باشد؟

الف) ۳ (ب) ۴ (ج) ۵ (د) ۶ (ه) ۷

۲۸) ترکیب دو دنباله‌ی مرتب A و B به ترتیب با اندازه‌های n و m یک دنباله‌ی مرتب به‌اندازه‌ی $n + m$ تولید می‌کند و این کار به‌اندازه‌ی $m + n$ هزینه دارد. (مثلاً اگر $A = (1, 2, 3, 5)$ و $B = (4, 6)$ باشد $C = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ترکیب این دو دنباله و هزینه‌ی تولید آن ۶ است.) برای ترکیب سه دنباله، ابتدا دو تای آن‌ها را با هم ترکیب و دنباله‌ی حاصل را با دنباله‌ی سوم ترکیب می‌کنیم. بدیهی است که انتخاب دو دنباله‌ی اول در کل هزینه‌ی ترکیب مؤثر است. حال فرض کنید ۷ دنباله به‌اندازه‌های ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۸، و ۱۰ داریم. کم‌ترین هزینه‌ی کل برای ترکیب این ۷ دنباله چه قدر است؟

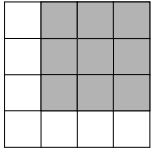
الف) ۴۸ (ب) ۱۰۵ (ج) ۱۳۴ (د) ۱۴۴ (ه) ۱۶۲

۲۹) در یک جدول، دو خانه را همسایه می‌گوییم اگر در یک نقطه یا در یک ضلع اشتراک داشته باشند (بنابراین، هر خانه حداکثر ۸ همسایه دارد). می‌خواهیم در یک جدول 10×10 ، k خانه را علامت بزینیم به طوری که هر خانه‌ی علامت نخورده حداقل یک همسایه علامت خورده داشته باشد. k حداقل چه قدر است؟

الف) ۱۳ (ب) ۱۴ (ج) ۱۵ (د) ۱۶ (ه) ۱۷

۳۰) یک n -ضلعی را «کامل» می‌نامیم اگر به‌ازای هر عدد صحیح i ($1 \leq i \leq n$)، دقیقاً یک ضلع به طول i داشته باشد و هر دو ضلع مجاور آن بر هم عمود باشند. کم‌ترین عدد n که به‌ازای آن، n -ضلعی کامل وجود دارد چند است؟

الف) ۴ (ب) ۶ (ج) ۸ (د) ۱۲ (ه) ۱۶



۳۱) بازی یک نفره‌ی «کوئیدج» به شکل زیر انجام می‌شود: یک صفحه‌ی 4×4 که همه‌ی ۱۶ خانه‌ی آن سفید هستند در اختیار داریم. در هر حرکت، یکی خانه را انتخاب می‌کنیم. با انتخاب هر خانه، رنگ آن خانه و همه‌ی خانه‌هایی که در بالا و سمت راست آن هستند عوض می‌شود (از سفید به سیاه یا از سیاه به سفید تغییر می‌یابد). مثلاً در شکل مقابل با انتخاب خانه‌ی دوم از ردیف سوم، رنگ بعضی از خانه‌ها سیاه شده است.

می‌خواهیم با k بار انجام این حرکت، صفحه را به صورت شطرنجی در آوریم (یعنی رنگ هیچ دو خانه‌ای که در یک ضلع مشترکند، یکی نباشد). کم‌ترین مقدار k چه قدر است؟

- الف) ۶ (ب) ۷ (ج) ۸ (د) ۱۵ (ه) ۱۶

۳۲) ۳۰ دانش آموز در یک کلاس حضور دارند که همه‌ی آن‌ها افرادی راست‌گو هستند. می‌دانیم یکی از آن‌ها المپیدی است ولی او را نمی‌شناسیم. می‌خواهیم با پرسیدن k سؤال، فرد مزبور را بیابیم. در هر سؤال می‌توانیم یکی از دانش آموزان را انتخاب کنیم و به او اسم چند نفر از دانش آموزان را بگوییم و از او بپرسیم که آیا فرد المپیدی، یکی از آن چند نفر است یا خیر؟ او هم فقط به این سؤال جواب «بله» یا «خیر» می‌دهد. k حداقل چه قدر باشد که با پرسیدن k سؤال همواره مطمئن باشیم می‌توانیم فرد مورد نظر را بشناسیم؟

- الف) ۳ (ب) ۵ (ج) ۷ (د) ۱۰ (ه) ۱۵

۳۳) اعداد ۱ تا ۱۰۰۰ را به این صورت در یک سطر می‌نویسیم: ابتدا عدد ۱، سپس بدون فاصله عدد ۱۰۰۰، بعد ۲، سپس ۹۹۹، و ... مثلاً ۱۸ رقم ابتدای این سطر به این صورت است: ۰۱۱۰۰۰۲۹۹۹۳۹۹۸۴۹۹۷۵. ۴۹۰ امین رقم نوشته‌شده در این سطر چند است؟

- الف) ۰ یا ۹ (ب) ۱ یا ۸ (ج) ۲ یا ۷ (د) ۳ یا ۶ (ه) ۴ یا ۵

۳۴) یک رشته‌ی دودویی n -رقمی را یک «عدد جهانی» می‌نامیم در صورتی که وقتی خودش را با معکوسش جمع بزنیم دو بریک ایجاد نشود. مثلاً فرض کنید $n = 6$. در این صورت (010001) یک عدد جهانی است چون معکوس آن (100010) است و موقع جمع زدن این دو عدد، هیچ دو رقم ۱ روی هم قرار نمی‌گیرند تا موقع جمع زدن دو بریک به وجود آید. (در واقع دو بریک، معادل ده بریک، در جمع اعداد دودویی است و وقتی ایجاد می‌شود که جمع ارقام واقع در یک ستون، بیش‌تر از ۱ شود). تعداد اعداد دودویی جهانی ۱۰ رقمی چه قدر است؟

- الف) ۲۵ (ب) ۲۱۰ (ج) ۳۵ (د) ۳۸ (ه) ۴۴

۳۵) در یک صفحه‌ی شطرنج (8×8) به چند روش می‌توان ۸ رخ در خانه‌های سیاه قرار داد که هیچ دو رخی یک‌دیگر را تهدید نکنند (در یک سطر یا یک ستون نباشند)؟

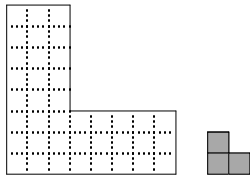
- الف) $8!/2$ (ب) ۱۲۰ (ج) ۵۷۶ (د) ۴۰۹۶ (ه) ۱۴۴۰۰

۳۶) دو تابع A و B به صورت زیر بر روی اعداد طبیعی تعریف شده‌اند.

$$A(n) = \begin{cases} 1 & n = 1, \\ B(n+1) - 1 & n > 1 \end{cases} \quad B(n) = \begin{cases} 1 & n \leq 2, \\ A(n-2) + 2 & n > 2 \end{cases}$$

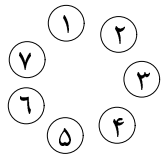
مقدارهای $A(1381)$ و $B(2003)$ چه قدرند؟

- الف) ۱۳۸۱ و ۲۰۰۳ (ب) ۱۳۸۰ و ۲۰۰۲ (ج) ۱۳۸۲ و ۲۰۰۳ (د) ۱۳۸۲ و ۲۰۰۴ (ه) ۱۳۸۰ و ۲۰۰۳



۳۷) به چند طریق می‌توان سالن به شکل مقابل را با موزائیک نشان داده شده کاملاً پوشاند به طوری که موزائیک‌ها روی هم قرار نگیرند؟

- الف) ۸ ب) ۱۲ ج) ۱۴ د) ۱۶ ه) ۲۰



۳۸) بهداد مشغول انجام بازی «دامبلدور» است. این بازی به این صورت انجام می‌شود: ۷ سنگ با شماره‌های ۱ تا ۷ به صورت زیر قرار دارند. در حرکت i ام بازی، بهداد به صورت یک- i سنگ را در جهت ساعت‌گرد رد کرده و به صورت جفت-پا روی سنگ بعد می‌پرد و می‌ایستد. برای مثال بهداد در شروع بازی روی سنگ ۱ است. او در حرکت اول جفت-پا روی سنگ ۲ می‌پرد. در حرکت دوم یک-پا روی سنگ ۳ پریده و سپس جفت پا روی سنگ ۴ می‌پرد.

در حرکت سوم، یک-پا روی سنگ‌های ۵ و ۶ پریده و سپس جفت-پا روی سنگ ۷ می‌پرد و بالاخره، در حرکت چهارم، به صورت یک-پا روی سنگ‌های ۱، ۲، ۳ می‌پرد و روی سنگ ۴ به صورت جفت-پا می‌ایستد. آیا می‌توانید مشخص کنید بهداد پس از حرکت ۱۳۸۱ ام روی کدام سنگ خواهد بود؟

- الف) ۱ ب) ۲ یا ۳ ج) ۴ د) ۵ یا ۶ ه) ۷

۳۹) روز دیگر محمد به بازی «اسنیپ» پرداخت. این بازی شبیه بازی دامبلدور است. در این بازی ۱۰ سنگ ۱ تا ۱۰ به صورت دایره‌ای شکل قرار گرفته‌اند. محمد روی سنگ ۱ قرار دارد. او در حرکت i ام باز هم روی $i - 1$ سنگ به صورت یک-پا و سپس روی سنگ بعدی جفت-پا می‌پرد. اما فرق مهم این دو بازی در این است که در این بازی هرگاه محمد به صورت جفت-پا روی سنگ ۱ بی‌پرد، جهت پریدنش را عوض می‌کند. مثلاً تصور کنید پس از حرکت سوم او روی سنگ ۷ قرار دارد. او در حرکت چهارم به صورت یک-پا به ترتیب روی سنگ‌های ۸، ۹ و ۱۰ خواهد پرید و سپس به صورت جفت-پا روی سنگ ۱ می‌پرد. حال جهت حرکتش عوض می‌شود و در حرکت پنجم، به صورت یک-پا از روی سنگ‌های ۱۰، ۹، ۸، و ۷ خواهد گذشت و به صورت جفت-پا روی سنگ ۶ می‌پرد. مشخص کنید پس از حرکت ۲۰۰۳ ام او روی کدام سنگ خواهد بود؟

- الف) ۱ یا ۲ ب) ۳ یا ۴ ج) ۵ یا ۶ د) ۷ یا ۸ ه) ۹ یا ۱۰

۴۰) در یک خانواده‌ی مردسالار مجموعه‌ی «اجداد» یک نفر برابر است با پدر پدر او، پدر پدر او و ... و مجموعه‌ی «بزرگ‌تر»های یک نفر برابر است با اجداد و برادران اجداد او. در روز عید، بزرگ فامیل که هیچ برادری بزرگ‌تری ندارد یک سکه به یکی از پسران خود می‌دهد. هر کس که سکه را دریافت کند یا آن را برای خود برمی‌دارد و یا آن را به یکی از پسرانش یا یکی از بزرگ‌ترهایش می‌بخشد. اگر G نام بزرگ فامیل و P, Q, R, S نام ۴ نفر از اعضای آن فامیل باشد که در یک دور بازی مشارکت داشته‌اند، کدام یک از ترتیبات دریافت سکه زیر ممکن نیست؟

- الف) $G \rightarrow P \rightarrow R \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow R$ ب) $G \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow P$
 ج) $G \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow P$ د) $G \rightarrow P \rightarrow R \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow R$
 ه) $G \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow Q \rightarrow S$