

## مرحله ی دوم شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

### مسئله ی ۱: مادر بزرگ مهدی و ایلیا ..... ۱۵ امتیاز

مهدی و ایلیا مهمان مادر بزرگ شان بودند که او این سوال را مطرح کرد:  $n$  عدد مثبت داریم و در هر مرحله می توانیم دو عدد از این اعداد را برداریم و به جای آن دو عدد مجموع یا تفاضل شان را قرار دهیم (تفاضل دو عدد، همیشه نامنفی است)، تا فقط یک عدد باقی بماند. می خواهیم تنها عدد باقی مانده کمینه شود.

مهدی گفت در هر مرحله دو بزرگ ترین عدد را می گیریم، حذف می کنیم و تفاضل شان را به جای آن دو قرار می دهیم و این کار را آن قدر تکرار می کنیم تا فقط یک عدد باقی بماند. ایلیا گفت در هر مرحله بزرگ ترین عدد و کوچک ترین عدد را حذف می کنیم و تفاضل شان را قرار می دهیم و این کار را آن قدر تکرار می کنیم تا به یک عدد برسیم.

مادر بزرگ به آنها گفت که هیچ کدام از این دو روش نمی تواند کمینه بودن عدد آخر را تضمین کند. و در ضمن برخلاف روش های شما که فقط از تفاضل استفاده می کند، می توان فقط با یک بار استفاده از تفاضل به عدد کمینه رسید.

الف. این که روش مهدی و ایلیا ممکن است به کوچک ترین عدد ممکن نرسد را با مثال هایی تایید کنید.

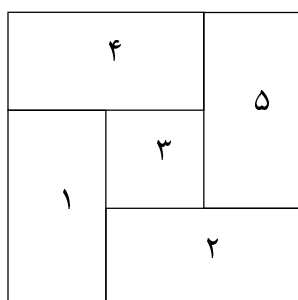
ب. ثابت کنید که برای رسیدن به عدد کمینه کافی است تنها یک بار از تفاضل استفاده کرد.

### مسئله ی ۲: فرش ..... ۲۰ امتیاز

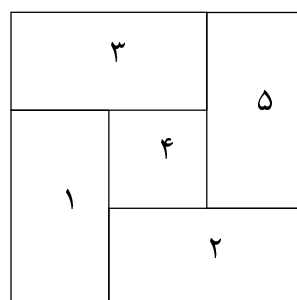
کف یک اتاق مستطیل شکل را می خواهیم با تعدادی متناهی فرش بیوشانیم. تمام فرش ها مستطیل شکل اند و ابعادی حقیقی دارند. یک نقشه ی قابل قبول، نحوه ی قرار گرفتن هر فرش در اتاق را نشان می دهد به طوری که هر نقطه ی اتاق دقیقاً توسط یک فرش پوشانده شده باشد؛ یعنی فرش ها روی هم قرار نگرفته اند و هیچ جای اتاق خالی نیست. می دانیم در هر نقشه ی قابل قبول، ضلع های هر فرش موازی اضلاع اتاق خواهد بود.

یک نقشه ی قابل قبول داده شده است. می خواهیم ترتیب پهن کردن فرش ها را مشخص کنیم، یعنی به هر یک از فرش ها شماره ای اختصاص دهیم که مشخص کند آن فرش، چندمین فرش است که باید پهن شود. یک ترتیب را خوب می نامیم اگر زمانی که طبق آن ترتیب فرش پهن می شود، ضلع های پایین و چپ آن فرش، یا دیوار باشد و یا هیچ قسمت فرش نشده ای نداشته باشد.

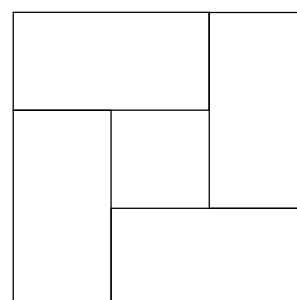
مثلاً در زیر شکل (۱) یک نقشه ی قابل قبول است، و شکل (۲) آن یک ترتیب غیر خوب را نشان می دهد، چرا که هنگام اضافه شدن فرش شماره ی ۳ قسمتی از پایین این فرش هنوز پوشانده نشده است، که بعداً توسط فرش ۴ پوشانده می شود. شکل (۳) یک ترتیب خوب را نشان می دهد.



(۳)



(۲)



(۱)

ثابت کنید که به ازای هر نقشه ی قابل قبول، یک ترتیب خوب وجود دارد.

آیدا قصد دارد جشن تولد بگیرد. متأسفانه به دلیل مشغله‌ی زیاد، تصمیم گرفته است مسئولیت کلیه‌ی تدارکات مراسم عروسی را به دوستش آقای «کاف» بدهد! آقای «کاف» پس از جست‌وجوی فراوان برای تدارکات نور عروسی، موفق به خرید یک «ریسه»ی ۱۰۰ لامپی (شامل ۱۰۰ عدد سرپیچ لامپ و ۱۰۰ عدد لامپ) شده است. ریسه تعدادی سرپیچ متصل به هم است که در صورتی که به آن‌ها لامپ بسته شود، به زیبایی روشن می‌شوند. البته فروشنده گفته است که دقیقاً ۵۰ تا از لامپ‌ها سالم و ۵۰ تای بقیه خراب‌اند. هم‌چنین دقیقاً ۵۰ تا از سرپیچ‌ها سالم و بقیه خراب‌اند!

آقای کاف قصد دارد، لامپ‌ها و سرپیچ‌های سالم را پیدا کرده و سپس برای به دست آوردن حداکثر نور در جشن تولد، پنجاه لامپ سالم را به پنجاه سرپیچ سالم وصل کند تا پنجاه لامپ روشن در ریسه موجود باشد. برای این منظور آقای کاف ریسه را به برق وصل کرده و شروع به امتحان لامپ‌ها و سرپیچ‌ها می‌کند. از آن‌جا که او هیچ وسیله‌ی اضافه‌ای در اختیار ندارد و لامپ‌های سالم و خراب و نیز سرپیچ‌های سالم و خراب کاملاً شبیه هم هستند، او می‌تواند فقط با بستن و بازکردن لامپ‌ها و سرپیچ‌ها به یک‌دیگر، آن‌ها را بیازماید. می‌دانیم که یک لامپ اگر به یک سرپیچ بسته شود، تنها در صورتی روشن می‌شود که هم سرپیچ سالم باشد و هم لامپ.

ضمناً می‌دانیم که باز کردن یک لامپ از یک سرپیچ دقیقاً یک دقیقه طول می‌کشد ولی از آن‌جا آقای کاف در بستن لامپ به سرپیچ مهارت زیادی دارد، زمان بستن یک لامپ صفر ثانیه فرض می‌شود.

الگوریتمی برای آقای کاف بنویسید (یعنی مراحل دقیق انجام کار را مشخص کنید) که در حداقل زمان بتواند لامپ‌های سالم و نیز سرپیچ‌های سالم را پیدا کرده و ریسه را با ۵۰ لامپ روشن برای جشن تولد آماده کند. دقت کنید که لزومی ندارد که در انتهای کار تمامی لامپ‌ها به تمامی سرپیچ‌ها متصل باشند. یک الگوریتم درست (ولی با زمان بد) چنین است:

۱) یکی از لامپ‌هایی که تا کنون آزموده نشده است را بردار.

۲) لامپ برداشته شده را با تمام سرپیچ‌هایی که خالی هستند امتحان کن، در صورتی که روشن شد، لامپ را در آن سرپیچ رها کرده و گرنه به سراغ سرپیچ بعدی برو.

۳) اگر لامپ آزموده نشده‌ای باقی مانده است به مرحله‌ی ۱ برو.

می‌توان ثابت کرد این الگوریتم در بدترین حالت، ۷۵۵۰ دقیقه طول می‌کشد.

الف. الگوریتمی بنویسید که حداکثر در ۵۰۰ دقیقه، ریسه را با ۵۰ لامپ روشن آماده کند. (۱۵ امتیاز)

ب. الگوریتمی بنویسید که حداکثر در ۲۵۰ دقیقه، ریسه را با ۵۰ لامپ روشن آماده کند. (۱۵ امتیاز)

توجه: حتماً در سطر اول پاسخ‌نامه، حداکثر زمان الگوریتم خود را بنویسید. در صورتی که فقط قسمت «ب» را به درستی حل کنید، نمره‌ی کامل این مسئله را خواهید گرفت.

محمد در اصفهان زندگی می‌کند و حسین در تهران. بین اصفهان و تهران یک خط ارتباطی ارزان وجود دارد که محمد برای فرستادن پیغام‌هایش به حسین از آن استفاده می‌کند. هر پیغام دنباله‌ای از ارقام ۰ یا ۱ (تعدادی بیت) است. متأسفانه تعدادی از دشمنان این دو دوست قصد دارند بین‌شان تفرقه ایجاد کنند؛ به همین دلیل برخی مواقع تعدادی از بیت‌های پیغامی که از این خط مبادله می‌شود را تغییر می‌دهند. محمد که از این موضوع مطلع شد یک خط ارتباطی گران قیمت بین اصفهان و تهران خرید. این خط از جاهای مخفی می‌گذرد و تضمین شده که بیت‌هایی که از آن رد می‌شود تغییری نخواهد کرد. ولی چون این خط ارتباطی گران قیمت است محمد دوست دارد تا حد ممکن مقدار کمی اطلاعات را از طریق این خط منتقل کند.

فرض کنید محمد قصد دارد  $2^k$  بیت را از خط ارزان قیمت منتقل کند. بر حسب اطلاعات قبلی او می‌داند که حداکثر ۲ بیت از این اطلاعات ممکن است توسط دشمنان تغییر کند. حال او قصد دارد حداقل تعداد بیت را به عنوان اطلاعات کمکی هم‌زمان از خط گران قیمت برای حسین بفرستد به طوری که حسین با استفاده از این اطلاعات اضافی بتواند تشخیص دهد که آیا هیچ‌یک از  $2^k$  بیت دریافتی تغییر کرده است یا خیر.

ثابت کنید اگر محمد کم‌تر از  $k+1$  بیت اطلاعات از خط گران قیمت بفرستد حسین نمی‌تواند قاطعانه تشخیص دهد که آیا بیت‌های فرستاده شده تغییر کرده‌اند یا خیر.

## مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

### مسئله‌ی ۵: صندوق‌چه‌ها ..... ۱۵ امتیاز

۵۲۸ صندوق‌چه با درهای بسته با شماره‌های ۱ تا ۵۲۸ موجودند. افرادی با شماره‌های ۱ تا ۵۲۸ این صندوق‌چه‌ها را یک‌به‌یک مورد بررسی قرار می‌دهند. در بررسی صندوق‌چه‌ی  $i$  توسط  $k$ ، اگر  $i$  بر  $k$  بخش پذیر باشد، فرد شماره‌ی  $k$  وضعیت در صندوق‌چه‌ی  $i$  را تغییر حالت می‌دهد؛ اگر باز بود می‌بندد و اگر بسته بود آنرا باز می‌کند.

می‌خواهیم تعدادی از این افراد را انتخاب کنیم تا آن‌ها هر کدام همه‌ی صندوق‌چه‌ها را بررسی کنند و در انتها فقط در صندوق‌چه‌ی شماره‌ی ۱ باز بماند و بقیه‌ی صندوق‌چه‌ها بسته باشند. ثابت کنید که دقیقاً یک گروه مشخص از افراد جواب این سوال است. درستی ادعای خود را اثبات نمایید.

### مسئله‌ی ۶: جدول اصلاح پذیر ..... ۲۰ امتیاز

جدولی به اندازه‌ی  $m \times n$  که در هر خانه‌اش ۰ یا ۱ نوشته شده موجود است. در هر مرحله مقدار خانه‌ها را به این صورت عوض می‌کنیم:

مقدار جدید یک خانه در مرحله‌ی  $i + 1$  ام ۱ است اگر و فقط اگر در مرحله‌ی  $i$  ام در خانه‌های هم‌سطر و هم‌ستونش (به جز خود آن خانه) تعداد فردی ۱ وجود داشته باشد.

توجه کنید که برای هر خانه  $m + n - 2$  خانه‌ی دیگر هم‌سطر یا هم‌ستونش وجود دارد.

یک جدول را «اصلاح پذیر» می‌گوییم اگر با شروع از این جدول و چند مرحله انجام عمل فوق بر روی کلیه‌ی خانه‌های جدول دوباره به جدول اصلی برسیم. اگر  $m$  و  $n$  هر دو زوج باشند، تعداد جداول اصلاح پذیر با اندازه‌ی  $m \times n$  را به دست آورید و ادعای خود را ثابت کنید.

### مسئله‌ی ۷: کلاه‌گذاری ..... ۳۰ امتیاز

۱۳۸۵ دانش‌آموز با شماره‌های ۱ تا ۱۳۸۵ که شماره‌ی هر یک بر روی پیراهنش نوشته شده به ترتیب شماره‌هایشان در یک صف قرار گرفته‌اند. بر روی سر هر یک از این افراد کلاهی به رنگ آبی یا قرمز قرار دارد. هر فرد از رنگ کلاه خود بی‌خبر است ولی رنگ کلاه‌های حداکثر ۱۰ نفر جلوی خود و ۱۰ نفر پشت‌سر خود و شماره‌های این افراد را می‌تواند ببیند.

حال هر فرد بدون آن‌که با دیگران صحبتی کند رنگ کلاه خود را حدس می‌زند و با شماره‌ی خودش بر روی یک کاغذ می‌نویسد و به سرپرست تحویل می‌دهد. توجه کنید که کسی تقلب نمی‌کند. اگر بیش از ۴۰٪ بچه‌ها رنگ کلاه خود را درست تشخیص دهند به همه جایزه داده می‌شود. این دانش‌آموزان می‌توانند قبل از شروع این بازی با هم مشورت کنند و سیاست واحدی را اتخاذ کنند تا برنده شوند.

شما این سیاست را تعیین کنید و مشخص کنید که هر کس چه جوابی باید بدهد تا گروه برنده شود. درستی روش خود را اثبات کنید.

## مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس دوم)

### مسئله‌ی ۸: آنتونیو ..... ۳۵ امتیاز

کشور آنتونیو مقررات عجیبی برای خیابان‌کشی دارد. خیابان‌های این کشور باید مستقیم باشند و دو طرف هر خیابان پیاده‌رو داشته باشد. هر خیابان باید از دو طرف از شهر بیرون برود. هم‌چنین در شهرهای این کشور فقط چهارراه وجود دارد، یعنی هر تقاطعی محل برخورد تنها دو خیابان است.

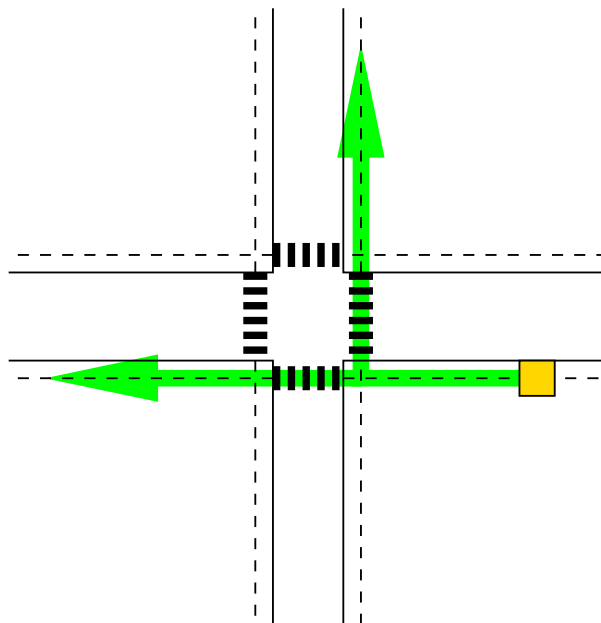
مردم پیاده فقط مستقیم بر روی پیاده‌رو حرکت می‌کنند مگر هنگامی که به چهارراه برسند، که در آن‌صورت دقیقاً از خط‌کشی عابر پیاده‌ی یکی از خیابان‌های آن چهارراه عبور می‌کنند و در همان جهت عبور به راه خود ادامه می‌دهند.

قرار است نقشه‌ی خیابان‌های یک شهر و محل خانه‌ی شهردار (در کنار یک خیابان) را طوری طراحی کنیم که اگر شهردار برای پیاده‌روی از خانه‌اش بیرون بیاید و مطابق مقررات حرکت کند بتواند به خانه‌اش برگردد.

برای این طراحی حالت‌های زیر را در نظر بگیرید:

- خیابان‌ها فقط افقی و عمودی باشند.
- خیابان‌ها می‌توانند در هر راستایی باشند.

در هر حالت فوق تعیین کنید که آیا می‌توان چنین شهری را طراحی کرد یا خیر. در صورت مثبت بودن جواب مثالی بزنید که در آن خانه‌ی شهردار و مسیر حرکت او مشخص شده باشد. برای جواب منفی، ادعای خود را ثابت کنید.



موفق باشید!