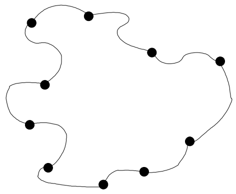
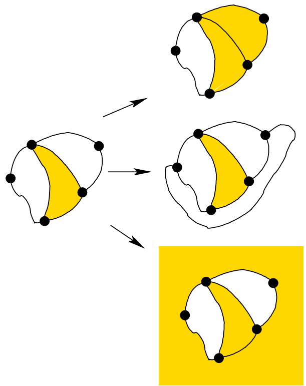
مسئله‌ی ۱: نقطه، خط، ناحیه .... ۲۰ امتیاز



هابیل و قابیل با هم یک بازی عجیب می‌کنند. آن‌ها ابتدا n نقطه روی صفحه رسم می‌کنند و نقطه‌ها را طوری با n خط (نه لزوماً راست) به هم وصل می‌کنند که هیچ دو خط هم‌دیگر را قطع نکنند (مگر در سرهایشان) و یک دور به وجود آید که از همه‌ی نقاط دقیقاً یک بار عبور کند. شکل روبه‌رو مثالی را برای $n = ۱۰$ نشان می‌دهد.

هابیل بازی را شروع می‌کند. هر بازی‌کن در نوبت خودش باید یکی از دو حرکت زیر را انجام دهد:



- یکی از ناحیه‌های صفحه را که توسط خطوط رسم شده در بازی به وجود آمده، به طور کامل رنگ کند. این ناحیه نباید قبلاً رنگ شده باشد. می‌توان ناحیه‌ی بیرونی (ناحیه‌ای که مساحت نامتناهی دارد) را هم انتخاب و رنگ کرد.
- دو نقطه که تاکنون با خطی به هم وصل نشده‌اند را با یک خط (نه لزوماً راست) به هم وصل کند، به شرطی که این خط جدید از ناحیه‌های رنگ شده عبور نکند و با هیچ خط و نقطه‌ی دیگری برخورد نکند.

شکل مقابل حرکت‌هایی قابل قبول را برای صحنه‌ای از بازی نشان می‌دهد.
کسی که نتواند حرکتی انجام دهد بازنده‌ی بازی است.

برای چه n هایی، قابیل می‌تواند طوری بازی کند که حتماً برنده‌ی بازی شود؟ ادعای خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی ۲: مهمان‌نوازی افراطی .... ۲۵ امتیاز

چنگیزخان در شهر A زندگی می‌کند. ۱۰ نفر از دوستانِ او از ساکنانِ شهرِ B مدتی در شهر A مهمان او هستند. او دوست ندارد که همه‌ی آن‌ها به شهرشان بازگردند. به همین دلیل، به روشِ عجیبی برایشان بلیط هواپیما می‌خرد. در کشور آن‌ها چند شرکت هواپیمایی هست و هر کدام تعدادی خط پرواز دارد. هر خط پرواز، بین دو شهر مشخص (A، B یا شهرهای دیگر) است و رفتن از هر یک از آن دو را به دیگری میسر می‌کند. برای استفاده از یک خط پرواز باید بلیطی از شرکت ارائه‌کننده‌اش داشت و هر بلیط تنها برای یک‌بار استفاده اعتبار دارد. برای رفتن از یک شهر به یک شهر دیگر می‌توان با پروازهای مستقل از چند شهر میانی نیز عبور کرد، به شرطی که بلیط برای پرواز به شهر میانی را هم داشت.

چنگیزخان از هر شرکت هواپیمایی تنها یک بلیط می‌خرد و آن‌ها را به دوستانش می‌دهد. او ادعا می‌کند که بلیط‌هایی که خریده است خاصیت‌های زیر را دارند و این را به دوستانش توضیح می‌دهد:

- با این بلیط‌ها همه با هم نمی‌توانید از اینجا (شهر A) به شهر B بازگردید.
- اگر از این‌ها دو تا بلیط را به دل‌خواه پس بگیرم (هر زوج بلیط ممکن)، با بلیط‌های باقی‌مانده حتماً دست‌کم یک نفر از شما می‌تواند به شهر B برسد.

آیا ممکن است چنگیزخان راست گفته باشد؟ یا او حتماً دروغ گفته است؟ اگر امکان راست گفتن برای چنگیزخان وجود دارد، مثالی بزنید که با حرف‌های او سازگار باشد. در غیر این صورت، اثبات کنید این اتفاق هیچ‌گاه امکان‌پذیر نمی‌باشد.

مسئله‌ی ۳: روبات برق‌کار .... ۲۵ امتیاز

n تا کلید با شماره‌های ۱ تا n در یک ردیف از راست‌به‌چپ قرار دارند که تعدادی از آن‌ها خراب و بقیه سالم‌اند. همه‌ی کلیدها به برق متصل‌اند و هر کلید دو حالت «بالا» و «پایین» دارد. هر کلید یک سیم خروجی دارد. اگر کلید سالم باشد سیم خروجی آن فقط وقتی که کلید «بالا» باشد برق دارد. سیم خروجی کلیدهای خراب همیشه برق دارد. برای یافتن کلیدهای خراب از یک روبات استفاده می‌کنیم. به این روبات فهرستی از دستورها داده شده است و او باید دستورها را از ابتدا تا انتها به ترتیب اجرا کند. دستورها فقط یکی از گونه‌های زیرند:

- حالت کلید مقابل خود را بررسی کن،
- حالت کلید مقابل را عوض کن،
- به کلید بعدی یا قبلی برو،
- بررسی کن که آیا خروجی کلید مقابل برق دارد یا خیر،
- توقف کن و کلیدهای خراب را گزارش بده.

روبات در ابتدا کار خود را از کلید شماره‌ی ۱ آغاز می‌کند. ولی متاسفانه روبات ما یک اشکال فنی دارد: اگر پس از بررسی کلید مقابلش، خروجی آن به برق وصل باشد، روبات به‌طور خودکار کارش را مجدداً از کلید شماره‌ی ۱ آغاز می‌کند و اجرای همان دستورات داده شده را از دستور اول از سر می‌گیرد.

فرض کنید که همه‌ی کلیدها در ابتدا «بالا» هستند. شما باید دنباله‌ای از دستورات را ارایه دهید تا اگر روبات آن‌ها را دنبال کند، پس از توقف همه‌ی کلیدهای خراب را به‌درستی گزارش دهد.

مسئله‌ی ۴: کشور برهوت .... ۳۰ امتیاز

کشوری با n شهر داده شده است. در حال حاضر جاده‌ای بین شهرها نیست ولی می‌توانیم بین هر دو شهری که بخواهیم یک جاده‌ی دوطرفه بسازیم. هزینه‌ی ساخت هر جاده α واحد است. پس، هزینه‌ی کلِ ساخت α برابر تعداد جاده‌هایی می‌شود که می‌سازیم. در این کشور وقتی از یک جاده عبور کنیم باید یک واحد پول به عنوان عوارض پرداخت کنیم. حال فرض کنید که پس از ساخت جاده‌های مورد نظرمان بخواهیم از شهر دل‌خواه i به شهر دل‌خواه j برویم. ممکن است برای رسیدن از i به j مسیرهای مختلفی موجود باشد (یک مسیر می‌تواند شامل عبور از چند جاده باشد.) هزینه‌ی هر مسیر تعداد جاده‌های آن است. $d_{i,j}$ را هزینه‌ی کوتاه‌ترین (کم‌جاده‌ترین) راه بین i و j بنامید. اگر بین i و j هیچ راهی وجود نداشته باشد، مقدارِ $d_{i,j}$، برابر بی‌نهایت خواهد بود. مقدار عوارض پرداختی بین دو شهر i و j برابر $d_{i,j}$ خواهد بود. «هزینه‌ی کل جاده‌ها» برای یک کشور را برابر مجموع هزینه‌ی ساخت جاده‌ها و جمع عوارض‌ها به ازای هر دو شهرِ i و j تعریف می‌کنیم. مثلاً اگر n، برابرِ ۳، و مقدارِ α، برابر ۱۰ باشد، و ما یک جاده بین شهرهای ۱ و ۲، و یک جاده هم بین شهرهای ۲ و ۳ بسازیم، آن‌گاه هزینه‌ی ساخت برابر $2\alpha = 20$ و مقدار عوارض برابر $d_{1,2} + d_{1,3} + d_{2,3} = 1 + 2 + 1 = 4$ و بنابراین هزینه‌ی کل جاده‌های آن برابر ۲۴ خواهد بود. می‌خواهیم طوری جاده‌های کشور را بسازیم که هزینه‌ی کل جاده‌های آن کمینه شود. این مقدارِ کمینه را بر حسب n و α به‌دست آورید. (راهنمایی: $\alpha \geq 1$ و $\alpha < 1$ را جداگانه بررسی کنید.)

می‌توانید از مطلب زیر بدون اثبات در حل سؤالات این آزمون استفاده کنید.
n تا شهر داریم. تعدادی جاده بین این شهرها کشیده شده به طوری که هر جاده دقیقاً دو شهر را به هم متصل می‌کند. برای اینکه از هر شهر بتوان با استفاده از این جاده‌ها به هر شهر دیگر مسافرت نمود، لازم است که تعداد جاده‌ها دست‌کم $n-۱$ باشد.

مسئله‌ی ۵: فاصله‌ی جای‌گشت‌ها .... ۲۰ امتیاز

اگر اعداد ۱، ۲، ...، n را به ترتیبی دل‌خواه از چپ به راست بنویسیم، یک جای‌گشت به طول n حاصل می‌شود. مثلاً $\langle ۱,۳,۲,۴\rangle$ یک جای‌گشت به طول ۴ است. فاصله‌ی دو جای‌گشت (با طول یک‌سان) برابر است با تعداد مکان‌های متناظری از دو جای‌گشت که با هم متفاوت‌اند. مثلاً فاصله‌ی $\pi' = \langle ۱,۳,۲,۴\rangle$ و $\pi'' = \langle ۱,۴,۳,۲\rangle$ برابرِ ۳ است، چون این دو جای‌گشت در مکان‌های دوم، سوم و چهارم متفاوت‌اند.

مجموعه‌ی A شامل ۱۳۸۶ جای‌گشت به طول n و با نام‌های $\pi_۱$، $\pi_۲$، ... و $\pi_{۱۳۸۶}$ است. فاصله‌ی یک جای‌گشت دل‌خواه π به طول n تا مجموعه‌ی A برابر است با فاصله‌ی π و $\pi_۱$، به علاوه‌ی فاصله‌ی π و $\pi_۲$، ...، به علاوه‌ی فاصله‌ی π و $\pi_{۱۳۸۶}$. از بین همه‌ی جای‌گشت‌های به طول n، جای‌گشتی را در نظر بگیرید که کم‌ترین فاصله را تا A دارد و این فاصله را x بنامید. ثابت کنید که دست کم یکی از اعضای A (یکی از π_iها) وجود دارد که فاصله‌اش تا A حداکثر $۲x$ است.

مسئله‌ی ۶: جمع مجموعه‌ها .... ۲۵ امتیاز

سه مجموعه‌ی A، B و C از اعداد را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی $A+B+C$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعدادی مانند x تعریف می‌کنیم که x را بتوان به‌صورت جمع سه عددِ a، b و c نوشت که $a\in A$، $b\in B$ و $c\in C$. مثلاً اگر $A=\{۱,۲\}$، $B=\{۲,۴\}$ و $C=\{۳,۱۰\}$ باشند $A+B+C$ برابر است با $\{٦,۷,۸,۹,۱۳,۱۴,۱۵,۱٦\}$.

اگر A، B و C به ترتیب m، n و k عضو داشته باشند، حداقل تعداد اعضای مجموعه‌ی $A+B+C$ بر حسب m، n و k چه‌قدر است؟ گفته‌ی خود را ثابت کنید.

مسئله‌ی ۷: سفر دوستان .... ۲۵ امتیاز

$۲n$ تا دوست دسته‌جمعی به مسافرت رفته‌اند. در طول مسافرت، تعدادی «تبادل پول» بین آن‌ها صورت می‌گیرد. در هر تبادل پول، یک نفر می‌تواند به یک نفر دیگر مقداری پول بدهد. بعد از این که مسافرت تمام شد و این $۲n$ نفر به خانه‌هایشان بازگشتند، معلوم شد که درست n نفر از آن‌ها در این مسافرت ضرر کرده‌اند (یعنی مقدار پولی که به بقیه داده‌اند، بیش‌تر از مقداری است که از بقیه گرفته‌اند) و n نفر دیگر سود کرده‌اند.

ما می‌دانیم که این $۲n$ نفر در خانه‌هایشان هر چه‌قدر که بخواهند پول دارند. با توجه به این موضوع، می‌خواهیم بین این $۲n$ نفر تعدادی تبادل پول دیگر ترتیب دهیم. هدف این است که بعد از انجام تبادل پول‌هایی که در این مرحله ترتیب داده‌ایم، هیچ‌کس وجود نداشته باشد که سود، یا ضرر کرده باشد (به عبارت دیگر این $۲n$ نفر «بی‌حساب» شوند.)

کوچک‌ترین x ای را بیابید که همیشه بتوان با انجام حداکثر x تبادل پول، این $۲n$ نفر را بی‌حساب کرد.

مسئله‌ی ۸: شکارچیان خرس .... ۳۰ امتیاز

سرزمین خرس‌ها ۱۳۸۶ شهر دارد با تعدادی جاده بین آن‌ها. هر جاده، دو شهر از این شهرها را به هم متصل می‌کند. لزوماً هر دو شهر مستقیماً با یک جاده به هم متصل نیستند، اما می‌دانیم که با کمک جاده‌ها می‌توان از هر شهر به هر شهر دیگر رفت.

اعضای گروه شکارچیان خرس، در تعدادی از شهرهای این منطقه مستقر شده‌اند. قانون اول این گروه می‌گوید هیچ دو عضوی از گروه نمی‌توانند هم‌زمان در یک شهر باشند (بنابراین تعداد شهرهایی که در هر زمان محل استقرار شکارچیان‌اند، با تعداد اعضای گروه برابر است).

گروه ناگهان تصمیم می‌گیرد که اعضایش در مجموعه‌ای جدید از شهرها مستقر شوند. واضح است که طبق قانون اول، تعداد شهرهای این مجموعه‌ی جدید نیز با تعداد اعضای گروه برابر است. برای رسیدن به هدف فوق، هر روز، درست یک نفر از اعضای گروه می‌تواند با طی کردن فقط یک عدد از جاده‌ها، از شهری که در آن مستقر است به شهری دیگر (بالطّبع خالی) برود و در آن مستقر شود. برای گروه تنها این مهم است که هر یک از شهرهای مجموعه‌ی جدید، محل استقرار یکی از اعضا شود. این مهم نیست که کدام عضو در پایانِ کار، در کدام شهر از شهرهای مقصد مستقر شده است.

اگر تصمیم گروه در همه‌ی حالات (یعنی برای هر مجموعه‌ی فعلی، هر مجموعه‌ی مقصد و نیز هر ترکیب قابل قبول از جاده‌ها) قابل اجرا باشد، حداقل تعداد روزهای لازم برای استقرار همه‌ی افراد در شهرهای انتخابی در بدترین حالت ممکن چه‌قدر است؟ اگر حالتی وجود دارد که چنین تصمیمی در آن عملی نیست، آن حالت کدام است؟ و چرا در این حالت، تصمیم گروه قابل اجرا نیست؟

مسئله‌ی ۱: جمع بخش‌پذیر .... ۱۵ امتیاز

$n^2 - n$ عدد طبیعی داده شده است. ثابت کنید n تا از آن‌ها هستند که جمع‌شان بر n بخش‌پذیر است.

مسئله‌ی ۲: رنگین‌مسیر .... ۱۵ امتیاز

بازی «رنگین‌مسیر» یک بازی دونفره است که روی یک صفحه‌ی $n \times ۴$ (۴ سطر و n ستون) که در ابتدا سفید رنگ است انجام می‌شود. بهروز و حمید مشغول انجام این بازی هستند و به نوبت طبق قوانین بازی حرکت می‌کنند. بهروز از رنگ آبی و حمید از رنگ قرمز استفاده می‌کند. بازی به این صورت انجام می‌شود که بهروز در هر مرحله دو خانه‌ی سفیدرنگی که در یک ضلع با هم مشترک هستند و تشکیل یک مستطیل ۲×۱ (یک سطر و دو ستون) می‌دهند را انتخاب می‌کند و آن‌ها را به رنگ خود (آبی) در می‌آورد. حمید نیز در نوبت خود دو خانه‌ی سفیدرنگی که در یک ضلع با هم مشترک باشند و تشکیل یک مستطیل ۱×۲ (دو سطر و یک ستون) بدهند را انتخاب می‌کند و آن‌ها را به رنگ خود (قرمز) در می‌آورد. اگر کسی نتواند در نوبت خود حرکت کند (یعنی نتواند دو خانه‌ی مجاور با شرایط گفته‌شده پیدا کند) نوبت بازی به نفر مقابل می‌رسد و اگر هیچ یک از دو نفر قادر به انجام حرکت نباشند بازی تمام می‌شود.

در پایان اگر دنباله‌ای از خانه‌های آبی وجود داشته باشد که هر کدام در یک ضلع با خانه‌ی بعدی مشترک باشد و اولین خانه در ستون اول جدول و آخرین خانه در ستون آخر قرار داشته باشد، در این صورت بهروز برنده‌ی بازی است.

اگر دنباله‌ای از خانه‌های قرمز وجود داشته باشد که هر کدام در یک ضلع با خانه‌ی بعدی مشترک باشد و اولین خانه در سطر اول جدول و آخرین خانه در سطر آخر قرار داشته باشد، در این صورت حمید برنده‌ی بازی است.

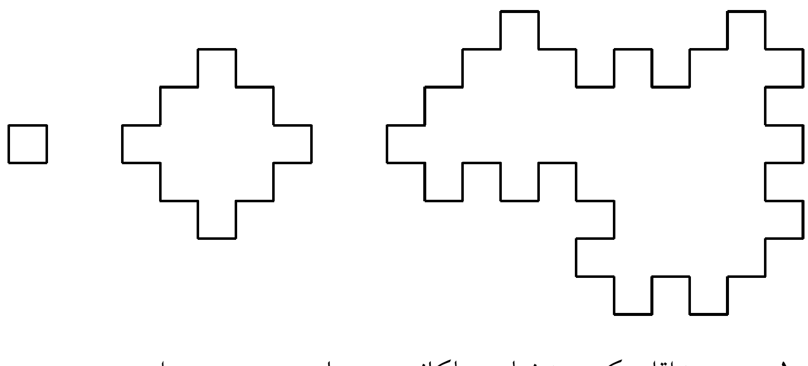
اگر هیچ یک از دو حالت فوق اتفاق نیفتد، بازی مساوی می‌شود. با فرض اینکه هر دو نفر به بهترین نحو ممکن بازی می‌کنند، به ازای هر $n \geq ۷$:

الف) [۷ امتیاز] اگر حمید شروع‌کننده‌ی بازی باشد، چه‌کسی بازی را می‌برد؟

ب) [۸ امتیاز] اگر بهروز شروع‌کننده‌ی بازی باشد، چه‌کسی بازی را می‌برد؟

مسئله‌ی ۳: چندضلعی پلکانی .... ۲۰ امتیاز

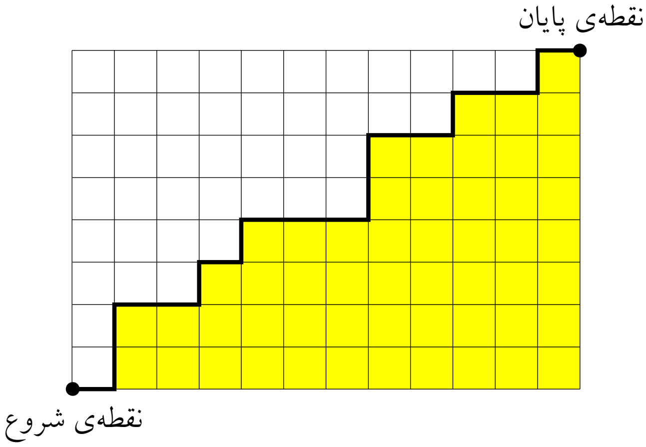
یک چندضلعی را پلکانی می‌گوییم اگر (۱) هر دو ضلع متوالی آن بر هم عمود باشند، (۲) طول همه‌ی اضلاع آن یک باشد، (۳) خودش را قطع نکند. شکل‌های زیر نمونه‌هایی از چندضلعی‌های پلکانی هستند:



نشان دهید برای هر $n > ۱۰$، حداقل یک چندضلعی پلکانی به مساحت n وجود دارد.

مسئله‌ی ۴: مساحت مسیر .... ۲۰ امتیاز

پریسا در نقطه‌ی پایین سمت چپ یک جدول $m \times n$ (دارای m سطر و n ستونِ خانه) ایستاده است و می‌خواهد با $m+n$ حرکت خود را به نقطه‌ی بالا سمت راست این جدول برساند. او در هر حرکت می‌تواند یک واحد به سمت راست یا یک واحد به سمت بالا بر روی خطوط جدول برود. به این ترتیب، پریسا در حرکت خود از نقطه‌ی پایین سمت چپ به نقطه‌ی بالا سمت راست، مسیری به طول $m+n$ را طی می‌کند. تعداد خانه‌های زیرِ یک مسیر را «مساحت» یک مسیر می‌نامیم. در شکل زیر نمونه‌ای از یک مسیر را در یک جدول ۱۲ × ۸ مشاهده می‌کنید. خانه‌های زیر مسیر در آن مشخص شده‌اند و مساحت مسیر برابر ۵۳ است.



فرض کنیم پریسا به A حالت مختلف بتواند از گوشه‌ی پایین سمت چپ جدول به بالا سمت راست آن برود. مجموع مساحت‌های این A مسیر را B می‌نامیم. $\frac{B}{A}$ چه‌قدر است؟ (به عبارتِ دیگر میانگین مساحتِ مسیرهایی که پریسا می‌تواند طی کند، چه‌قدر است؟)

مسئله‌ی ۵: جدول طلایی .... ۳۰ امتیاز

یک جدول $n \times n$ را «طلایی» می‌گوییم اگر برای هر دو سطر a و b و هر دو ستون c و d آن داشته باشیم:

$$M_{ac} + M_{bd} \neq M_{ad} + M_{bc}$$

۱	۰	۰
۰	۱	۰
۰	۰	۱

منظور از M_{ij}، خانه‌ی سطر iاُم و ستون jاُم جدول است. به عنوان مثال، جدول ۳ در ۳ روبه‌رو یک جدول طلایی است.

ثابت کنید اگر همه‌ی عناصر یک جدول طلایی از مجموعه‌ی $\{۰, ۱, ۲, \cdots, k\}$ انتخاب شوند، آن‌گاه $۲k + ۱ \geq n$ است.