مرحله‌ی دوم هجدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس اوّل)

مسئله‌ی ۱: وزنه‌ها .... ۱۰ امتیاز

n عدد وزنه‌ی متفاوت با وزن‌های 2^0، 2^1، ...، تا 2^{n-1} (از هر کدام یک عدد)، و یک ترازوی دو کفه‌ای در اختیار داریم. وزن هر وزنه بر روی آن نوشته شده‌است. در ابتدای کار، هیچ وزنه‌ای روی ترازو قرار ندارد. در هر حرکت یکی از وزنه‌هایی که روی ترازو نیست را برداشته و روی یکی از کفه‌های ترازو قرار می‌دهیم؛ پس از این کار، اگر کفه‌ی سمت چپ ترازو پایین‌تر بود (سنگین‌تر بود)، حرف L و اگر کفه‌ی سمت راست ترازو پایین‌تر بود، حرف R را روی کاغذ می‌نویسیم. (می‌توان نشان داد که کفه‌ها هیچ‌وقت مساوی نمی‌شوند!) این کار را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. دقت کنید حروف را به ترتیب پشت سر هم می‌نویسیم. هم‌چنین توجه کنید که هرگز حق نداریم وزنه‌ای را از روی یک کفه برداریم. با این حساب وقتی وزنه‌ای روی یک کفه قرار گرفت تا پایان کار همان‌جا باقی می‌ماند.

در پایان کار، یعنی زمانی که همه وزنه‌ها روی ترازو قرار گرفتند، یک رشته به طول n از حروف L و R ایجاد می‌شود. ثابت کنید که به‌ازای هر رشته به طول n از L و R، می‌توان وزنه‌ها را به ترتیبی روی ترازو قرار داد که رشته مورد نظر ساخته شود.

مسئله‌ی ۲: نوارهای دودویی سارا .... ۲۰ امتیاز

سارا علاقه‌ی زیادی به نمایش اعداد در مبنای ۲ دارد! یک روز صبح، او تمام اعداد ۰ تا $2^n - 1$ را روی 2^n عدد نوارِ کاغذی، در مبنای ۲ می‌نویسد و در سمت چپ اعدادی که کم‌تر از n رقمِ دودویی (اصطلاحاً «بیت») دارند، آن‌قدر صفر می‌گذارد تا تمام اعداد دقیقاً n بیتی بشوند.

عصر همان روز، دارا (برادر سارا)، نوارهای او را برداشته و به اتاق خودش می‌رود. سپس، دور از چشم سارا، ابتدا نوارها را با یک ترتیب دل‌خواه زیر هم قرار می‌دهد (تا چیزی شبیه یک جدول با 2^n سطر و n ستون از ارقام ۰ یا ۱ درست شود)؛ و بعد از آن روی هر کدام از $2^n \times n$ بیتِ این نوارها، یک سکّه قرار می‌دهد تا بیتِ زیر آن دیده نشود. پس از این کار، دارا از سارا می‌خواهد که به اتاقش بیاید و با برداشتن حداقل تعداد سکّه از روی بیت‌های نوارها، تعیین کند که نوارِ هر کدام از سطرها، دقیقاً کدام‌یک از اعدادِ ۰ تا $2^n - 1$ اوّلیه است.

بعد از کمی فکر کردن، سارا تمام سکّه‌های همه‌ی نوارها به‌جز نوار آخر را بر می‌دارد (تا اعداد آن‌ها را به‌سادگی ببیند) و سپس نتیجه می‌گیرد که بیت‌های زیرِ سکّه‌هایِ آخرین نوار، عددی از اعدادِ ۰ تا $2^n - 1$ را تشکیل می‌دهند که در نوارهای دیگر نیامده است! دارا که چندان از ایده‌ی سارا خوشش نیامده، از او می‌خواهد که سعی کند با برداشتن تعداد کم‌تری سکّه، ماهیت همه‌ی نوارها را تشخیص دهد.

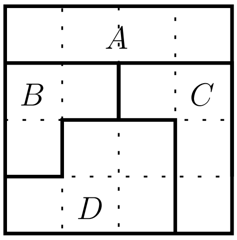
به سارا کمک کنید و روشی ارائه دهید که برای هر $n \geq 2$، او بتواند با برداشتن حداکثر $((n-1) \times 2^n) + 1$ سکه، تمام نوارها را به‌طور دقیق شناسایی کند.

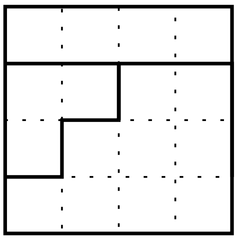
مسئله‌ی ۳: خانه‌های تک‌رنگ .... ۲۰ امتیاز

یک جدول $n \times n$ از اعداد ۱، ۲، تا ...n داده شده است. در هیچ سطر یا ستونی از این جدول عدد تکراری یافت نمی‌شود؛ به عبارت دیگر، در هر سطر یا ستون تمام اعداد ۱، ۲، تا ...n وجود دارند.

اگر x یک عدد اعشاری باشد، $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیحِ کوچک‌تر از x است. با این تعریف، ثابت کنید که می‌توان $[\frac{n}{2}]$ تا از خانه‌های این جدول را انتخاب نمود به‌طوری‌که اوّلاً، هیچ زوج از این خانه‌ها در یک سطر یا ستون قرار نداشته باشند. ثانیاً، هیچ زوج از این خانه‌ها شامل عدد یک‌سانی نباشد.

مسئله‌ی ۴: برش نواحی .... ۲۵ امتیاز





یک جدول $n \times n$ در اختیار داریم. در ابتدا جدول از n^2 ناحیه تشکیل شده است (n^2 مربع 1×1). در هر مرحله می‌توانیم **تمام** دو ناحیه‌ی مجاور (یعنی دو ناحیه که لااقل یک پاره‌خط مشترک دارند) را از جدول انتخاب کنیم و این دو ناحیه را با هم ادغام کنیم؛ یعنی مرز مشترک بین این دو ناحیه را پاک کنیم. فرض کنید طول این مرز مشترک در مرحله‌ی i ام a_i باشد. اگر بعد از k مرحله، تنها یک ناحیه باقی بماند (یعنی یک مربع $n \times n$)، اعداد $a_1, \ldots, a_k$ به‌دست می‌آیند. برای مثال، در شکل سمت چپ بالا اگر نواحی C و D را بخواهیم با هم ادغام کنیم، محیط مشترک بین این دو ناحیه ۳ واحد بوده و نهایتاً به شکل پایین می‌رسیم.

الف) (۱۰ نمره) روشی ارائه دهید که در آن هر یک از a_i ها ۱ یا ۲ باشد.

ب) (۱۵ نمره) نشان دهید کم‌ترین مقدار $\sum_{i=1}^{k} a_i^2$ وقتی رخ می‌دهد که هر یک از a_i ها ۱ یا ۲ باشد و با استفاده از این نکته جواب مسئله، یعنی کم‌ترین مقدار $\sum_{i=1}^{k} a_i^2$ را به‌دست آورید.

مسئله‌ی ۵: عمو نقاش .... ۲۵ امتیاز

دیوار خانه‌ی عمو نقّاش به صورت یک جدول $n \times n$ می‌باشد. عمو نقّاش برای این‌که مصداق ضرب‌المثل «کوزه‌گر از کوزه شکسته آب می‌خوره» نشود، می‌خواهد دیوار خانه‌اش را رنگ‌آمیزی کند. برای این‌کار عمو هر بار قلم‌موی خودش را درون یک سطل رنگِ متفاوت با رنگ‌های قبلی که تا به حال استفاده کرده، می‌کند و قلم‌موی رنگی را روی یک سطر یا یک ستون جدول به‌طور کامل می‌کشد.

عمو نقّاش می‌خواهد هر کسی به خانه‌شان می‌آید، هنرش را بفهمد. به‌همین خاطر او می‌خواهد طوری دیوار را رنگ‌آمیزی کند که تعداد رنگ‌هائی که روی دیوار دیده می‌شود، بیش‌ترین باشد.

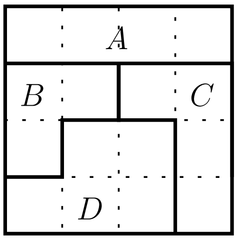
شما به عمو نقّاش کمک کنید؛ به این معنی که اولاً، برای هر عدد n، یک روش رنگ‌آمیزی ارائه دهید که در آن با بیش‌ترین تعداد رنگ دیوار رنگ‌آمیزی شود و ثانیاً، ثابت کنید این مقدار بیشینه است.

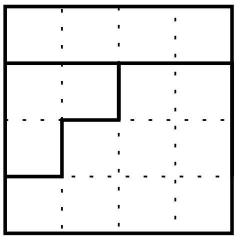
مسئله‌ی ۱: خانه‌های دورنگی .... ۲۰ امتیاز

یک جدول $n \times n$ از اعداد ۱، ۲، تا $\ldots n$ داده شده است. در هیچ سطر یا ستونی از این جدول عدد تکراری یافت نمی‌شود؛ به عبارت دیگر، در هر سطر یا ستون تمام اعداد ۱، ۲، تا $\ldots n$ وجود دارند.

اگر x یک عدد اعشاری باشد، $[x]$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از x است. با این تعریف، ثابت کنید که می‌توان $[\frac{n}{2}]$ تا از خانه‌های این جدول را انتخاب نمود که هیچ زوجِ از خانه‌های انتخاب‌شده در یک سطر یا ستون قرار نداشته باشند و به‌ازای هر عدد $1 \leq i \leq n$ حداکثر دو تا از این خانه‌ها شامل عدد i باشند.

مسئله‌ی ۲: برش نواحی .... ۲۵ امتیاز





یک جدول $n \times n$ در اختیار داریم. در ابتدا جدول از n^2 ناحیه تشکیل شده است (n^2 مربع 1×1). در هر مرحله می‌توانیم **تمام** دو ناحیه‌ی مجاور (یعنی دو ناحیه که لااقل یک پاره‌خط مشترک دارند) را از جدول انتخاب کنیم و این دو ناحیه را با هم ادغام کنیم؛ یعنی مرز مشترک بین این دو ناحیه را پاک کنیم. فرض کنید طول این مرز مشترک در مرحله iام a_i است. اگر بعد از k مرحله، تنها یک ناحیه باقی بماند (یعنی یک مربع $n \times n$)، اعداد $a_1, \ldots, a_k$ به‌دست می‌آیند. برای مثال، در شکل سمت چپ بالا اگر نواحی C و D را بخواهیم با هم ادغام کنیم، محیط مشترک بین این دو ناحیه ۳ واحد بوده و نهایتاً به شکل پایین می‌رسیم.

الف) (۱۰ نمره) روشی ارائه دهید که در آن هر یک از a_iها ۱ یا ۲ باشد.

ب) (۱۵ نمره) نشان دهید کمترین مقدار $\sum_{i=1}^{k} a_i^2$ وقتی رخ می‌دهد که هر یک از a_iها ۱ یا ۲ باشد و با استفاده از این نکته جواب مسئله، یعنی کمترین مقدار $\sum_{i=1}^{k} a_i^2$ را بدست آورید.

مسئله‌ی ۳: عمو نقاش .... ۲۵ امتیاز

دیوار خانه‌ی عمو نقّاش به صورت یک جدول $n \times n$ می‌باشد. عمو نقّاش برای این‌که مصداق ضرب‌المثل «کوزه‌گر از کوزه شکسته آب می‌خوره» نشود، می‌خواهد دیوار خانه‌اش را رنگ‌آمیزی کند. برای این‌کار عمو هر بار قلم‌موی خودش را درون یک سطل رنگِ متفاوت با رنگ‌های قبلی که تا به حال استفاده کرده، می‌کند و قلم‌موی رنگی را روی یک سطر یا یک ستون جدول به‌طور کامل می‌کشد.

عمو نقّاش می‌خواهد هر کسی به خانه‌شان می‌آید، هنرش را بفهمد. به‌همین خاطر او می‌خواهد طوری دیوار را رنگ‌آمیزی کند که تعداد رنگ‌هائی که روی دیوار دیده می‌شود، بیش‌ترین باشد.

شما به عمو نقّاش کمک کنید؛ به این معنی که اولاً، برای هر عدد n، یک روش رنگ‌آمیزی ارائه دهید که در آن با بیش‌ترین تعداد رنگ دیوار رنگ‌آمیزی شود و ثانیاً، ثابت کنید این مقدار بیشینه است.

مسئله‌ی ۴: تلویزیون .... ۳۰ امتیاز

ایستگاه راه‌آهن شهر المپیادی‌ها n سالن انتظار دارد و در هر سالن یک تلویزیون برنامه پخش می‌کند. می‌دانیم صداوسیمای کشور المپیادی‌ها دارای n شبکه تلویزیونی است. در اولین روز سال ۱۳۸۷ در تلویزیون هر سالن انتظار، یکی از این شبکه‌ها پخش می‌شود، به‌طوری‌که هر یک از n شبکه بر روی دقیقاً یکی از این n تلویزیون دیده می‌شود. می‌دانیم راه‌آهن ترتیب پخش شبکه‌ها روی این n تلویزیون را به ترتیب خاصی در پایان هر روز تغییر می‌دهد.

> یک تعریف: یک ترتیب نوشتن اعداد ۱ ... تا n در یک ردیف را یک جای‌گشت از این اعداد گوییم. مثلاً $\langle ۴,۵,۲,۱,۳ \rangle$ (از چپ‌به‌راست) یک جای‌گشت از اعداد ۱ تا ۵ است و ۲ عدد سوم این جای‌گشت است.

راه‌آهن یک جای‌گشت سرّی به نام π از اعداد ۱ تا n دارد که ما از آن بی‌اطلاعیم. البته می‌دانیم که به‌ازای هر i، اگر تلویزیونی در یک روز شبکه iام را نشان دهد، در روز بعد حتماً شبکه‌ی شماره‌ی π_i (یعنی عدد iام از جای‌گشت π) را نشان خواهد داد.

متأسفانه ما در هر روز مجازیم تنها یکی از سالن‌های انتظار (و در نتیجه فقط تلویزیون آن سالن) را به‌انتخاب خود ببینیم و به این ترتیب شماره‌ی شبکه‌ای که در آن پخش می‌شود را متوجه شویم.

روشی برای انتخاب سالن انتظار در هر روز و دیدن تلویزیون آن ارائه کنید تا به‌کمک آن در حداکثر $۲n - ۱$ روز به جای‌گشت π دست پیدا کنیم و در نتیجه روند تغییر پخش شبکه‌ها در تلویزیون‌ها را بفهمیم.

مسئله‌ی ۵: علی کوچولو .... ۲۰ امتیاز

علی کوچولو در تصورات خود، کشوری به‌نام «اُتوپیا» دارد. کشور او دارای n شهر است، منتها بین شهرهای اتوپیا، هیچ راه ارتباطی‌ای وجود ندارد. برای برقراری ارتباط بین این شهرها، علی کوچولو می‌خواهد تعدادی جاده بین برخی از شهرهای کشورش بکشد. ولی از آن‌جایی که او به اصول و فنون راه‌سازی آشنایی ندارد، به سراغ کتاب «اصول و فنون راه‌سازی» می‌رود. در این کتاب آمده است:

> " اگر می‌خواهید بین m شهر تعدادی جاده دوطرفه بکشید، به‌طوری‌که بتوان از هر شهر، به هر شهر دیگر رفت، باید حداقل $m - ۱$ جاده بین این شهرها کشیده شود. دقت کنید که هر جاده بین دقیقاً دو شهر کشیده می‌شود و از شهر A می توان به شهر B رفت اگر و فقط اگر بتوان با شروع از شهر A و با حرکت روی تعدادی از جاده‌ها به شهر B رسید."

علی کوچولو برای سر و سامان دادن به اوضاع کشور، دو هدف زیر را دنبال می‌کند.

۱) بین تعدادی از شهرهای اُتوپیا، جاده‌ی دو طرفه بکشد به‌طوری‌که بتوان از هر شهر آن به هر شهر دیگرش رفت.

۲) تعدادی مرکز پلیس، در برخی از شهرهای کشورش (در هر شهر، حداکثر یک مرکز پلیس) تأسیس کند. به یک کشور«d–حفاظت شده» گفته می‌شود، اگر برای رفتن از هر مرکزِ پلیس به یک مرکز پلیس «دیگر» مجبور به طی کردن حداقل d جاده‌باشیم. قهرمان داستان ما می‌خواهد مراکز پلیسِ اُتوپیا را طوری تاسیس کند که کشورش d–حفاظت شده باشد.

بیش‌ترین تعداد مراکزِ پلیس که باید تاسیس شود (بر حسب n و d) چه‌قدر باید باشد تاعلی کوچولو به دو هدف گفته‌شده برسد؟ در واقع باید طوری جاده‌ها ساخته و مراکز پلیس را تأسیس شوند که به اهداف بالا برسید و و بیش‌ترین تعداد مرکز پلیس را داشته باشید.

در هر صورت، لازم است گفته‌ی خود را اثبات کنید.

مسئله‌ی ۶: وند–آزاد .... ۲۰ امتیاز

یک زبان از n کلمه تشکیل شده است و هر کلمه از تعدادی حرف. مجموعه‌ی حروف ما $\{a, b, \ldots, z\}$ است و هر کدام از این حروف برای خود وزنی دارند. وزن حرف a، برابرِ $c_۱$، وزن حرف b برابر $c_۲$ و به همین ترتیب، وزن حرف z، برابر $c_{۲۶}$ است. وزن هر کلمه هم برابر جمع وزن‌های حروف آن کلمه است و وزن یک زبان برابر جمع وزن‌های کلمات آن زبان. به عنوان مثال اگر $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ به ترتیب برابر با ۱، ۲ و ۳ باشند. وزن زبانِ $\{acb, abba\}$ برابر است با $۱۲ = (۱ + ۲ + ۲ + ۱) + (۲ + ۳ + ۱)$.

یک کلمه «پیشوند» یک کلمه‌ی دیگر است اگر و فقط اگر در ابتدای آن ظاهر شده باشد. مثلاً abzd پیشوند abzdsdf است. به همین شکل، یک کلمه «پسوند» یک کلمه‌ی دیگر است اگر و فقط اگر در انتهای آن ظاهر شده باشد. مثلاً sjf پسوند hgsjf است.

یک زبان را «پیشوند–آزاد» می‌گوییم اگر و فقط اگر هیچ کلمه‌ای در آن پیشوند دیگری نباشد، و یک زبان را «پسوند–آزاد» می‌گوییم اگر و فقط اگر هیچ کلمه‌ای در آن پسوند دیگری نباشد.

فرض کنید وزنِ کم‌وزن‌ترین زبانِ n کلمه‌ایِ پیشوند–آزاد برابر X است. ثابت کنید که وزنِ کم‌وزن‌ترین زبانِ n کلمه‌ای که هم پیشوند–آزاد باشد و هم پسوند–آزاد حداکثر $۲X$ است.

مسئله‌ی ۷: سه‌تائی‌های پایدار .... ۲۵ امتیاز

n زیرمجموعه‌ی سه‌عضوی از مجموعه‌ی اعداد $\{۱,۲,\ldots,n\}$ داده شده است. ثابت کنید می‌توان $[\frac{n}{۳}]$ تا از اعداد مجموعه‌ی $\{۱,۲,\ldots,n\}$ را رنگ کرد به‌طوری‌که هیچ کدام از n زیرمجموعه‌ی سه‌عضوی ما پیدا نشود که هر سه عضوش رنگ شده باشند.

مسئله‌ی ۸: دایره‌های عجیب .... ۳۵ امتیاز

در یک جمع n نفره، هر دو نفر یا با هم آشنا هستند یا نیستند. فرض کنید افراد با شماره‌های ۱، ۲ تا n نام‌گذاری شده‌اند و آشنایی رابطه‌ای دوطرفه است؛ یعنی اگر i با j آشنا باشد حتماً j هم با i آشناست.

الف) (۱۰ نمره) با دانستن تمام روابط آشنایی در یک جمع n نفره، دایره‌های دوبه‌دو نامتقاطع $C_۱$، $C_۲$، ...، C_n در صفحه کشیده‌اند به‌طوری که دایره‌های C_i و C_j متداخل‌اند اگر و فقط اگر بین فرد i و فرد j رابطه‌ی آشنایی وجود داشته باشد. ثابت کنید در این جمع، به‌ازای هر چهار فرد متمایزِ a، b، c و d، که a با b، b با c و c با d آشناست، حتماً یا a با c آشناست یا b با d.

ب) (۲۵ نمره) جمعی را درنظر بگیرید که در آن به‌ازای هر چهار فرد متمایزِ a، b، c و d، که a با b، b با c و c با d آشناست، حتماً یا a با c آشناست یا b با d. ثابت کنید با دانستن تمام آشنایی‌های این جمع، می‌توان دایره‌های دوبه‌دو نامتقاطع $C_۱$، $C_۲$، ...، C_n را در صفحه کشید به‌طوری‌که دایره‌های C_i و C_j متداخل باشند اگر و فقط اگر بین فرد i و فرد j در آن جمع رابطه‌ی آشنایی وجود داشته باشد.

برای مثال در شکل زیر افرادی که با پاره‌خط به هم وصل شده‌اند با هم آشنا هستند و دایره‌های نیز بر همین اساس رسم شده‌اند.