مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تشریحی)

مسئله‌ی ۱: استخدام .... ۲۰ امتیاز

در یک شهر کوچک دو شرکت تازه‌تاسیس برای جذب کارمند آگهی استخدام داده‌اند. آن‌ها می‌دانند دقیقاً n نفر متقاضی کار در این شهر وجود دارد که همه‌ی آن‌ها ناگزیرند در یکی از این دو شرکت به‌کار مشغول شوند. هر یک از دو شرکت در آگهی استخدام خود، یک لیست با n خانه درج کرده‌اند که مشخص می‌کند اگر آن شرکت i کارمند ($1 \leq i \leq n$) داشته باشد، به هر یک از آن‌ها چه حقوقی تعلق خواهد گرفت (حقوق همه‌ی کارمندان در یک شرکت مساوی و فقط به تعداد کارمندان آن وابسته است). توجه کنید که اعداد نوشته‌شده در هر یک از این دو جدول مثبت ولی دل‌خواه هستند و لزوماً هیچ ترتیب خاصی ندارند.

ثابت کنید که n کارمند هم‌واره می‌توانند طوری در این دو شرکت استخدام شوند که هیچ‌یک از کارمندان تمایلی به تغییر شرکت نداشته باشد. زمانی یک کارمند مایل به تغییر شرکت خود خواهد بود که در صورت این تغییر، میزان حقوقش افزایش یابد.

مسئله‌ی ۲: جای‌گشت .... ۲۰ امتیاز

به دنباله‌ی π به‌طول n از اعداد $\{1, \ldots, n\}$ یک «جای‌گشت» می‌گوییم اگر و تنها اگر هر کدام از این اعداد دقیقاً یک‌بار در دنباله ظاهر شود. عددی که در مکان iام جای‌گشت ظاهر می‌شود را با $\pi(i)$ نمایش می‌دهیم. برای مثال $\pi : \langle 2, 4, 3, 1 \rangle$ یک جای‌گشت به‌طول ۴ می‌باشد. پدر علی به او جای‌گشتی از اعداد ۱ تا 2^k داده است ($k \geq 1$). علی می‌خواهد کاری کند که به‌ازای هر $1 \leq i \leq n = 2^k$، داشته باشیم $\pi(i) = i$. او برای این کار از الگوریتم زیر استفاده می‌کند:

۱) i را برابر ۱ قرار بده.

۲) عدد $\pi(i)$ را با $\pi(\pi(i))$ جابه‌جا کن.

۳) به i یک واحد اضافه کن.

۴) اگر $i \leq 2^k$ بود، به مرحله‌ی ۲ برو.

۵) پایان.

مثلاً، پس از اجرای الگوریتم فوق برای مثال بالا ($\pi : \langle 2, 4, 3, 1 \rangle$)، به جای‌گشت $\pi' : \langle 4, 3, 2, 1 \rangle$ می‌رسیم.

الف) ثابت کنید با k بار اجرای الگوریتم فوق، تمام اعداد سرجای خود قرار می‌گیرند.

ب) برای هر عدد k، جای‌گشتی مثال بزنید که نتوان با $k - 1$ بار اجرای الگوریتم فوق تمام اعداد را در جای خود قرار داد.

مسئله‌ی ۳: بزرگ‌راه‌ها .... ۲۰ امتیاز

بین n شهر در یک کشور ($n > 2$)، $n - 1$ بزرگ‌راه به‌گونه‌ای احداث شده‌اند که از هر شهر به هر شهر دیگر می‌توان سفر کرد. هر بزرگ‌راه دقیقاً دو شهر را به یک‌دیگر وصل می‌کند که این زوج شهرها را «مجاور» هم می‌نامیم. قرار است به هر بزرگ‌راه یک عدد به‌عنوان عوارض اختصاص یابد به‌گونه‌ای که هر خودرویی که از آن بزرگ‌راه می‌گذرد مجبور باشد آن مقدار عوارض را به هر یک از دو شهر در دو سر آن بزرگ‌راه بپردازد. درآمد هر شهر برابر مجموع عوارض اختصاص یافته به بزرگ‌راه‌هایی است که یک سرشان به آن شهر متصل است.

یک تیم کارشناسی به‌ازای هر بزرگ‌راه دو عدد مختلف پیش‌نهاد کرده است و ما می‌توانیم یکی از این دو عدد را به‌عنوان عوارض آن بزرگ‌راه تعیین کنیم. ولی به‌دلیل افزایش رقابت بین شهرها، عوارض تعیین‌شده برای بزرگ‌راه‌ها باید طوری باشد که درآمد هر شهر با هیچ یک از شهرهای مجاورش یک‌سان نباشد.

الف) ثابت کنید اگر تمامی عددهای پیش‌نهادی حقیقی و بزرگ‌تر از صفر باشند، هم‌واره می‌توان عوارض بزرگ‌راه‌ها را طوری تعیین کرد که شرط رقابت شهرها برقرار بماند.

ب) فرض کنید امکان پیشنهاد عدد صفر هم باشد (یعنی امکان دریافت نکردن عوارض در بعضی از بزرگ‌راه‌ها). مثالی ارائه کنید که در آن نتوان عوارض هر بزرگ‌راه را از بین اعداد پیشنهادی به گونه‌ای انتخاب کرد که شرط رقابت شهرها برقرار بماند. دقت کنید که در مثال خود باید برای هر بزرگ‌راه دو عدد متفاوت پیش‌نهاد کنید که دست‌کم یکی از آن دو عدد بزرگ‌تر از صفر باشد.

مسئله‌ی ۴: کشور عجیب .... ۲۰ امتیاز

در کشور «عجیب» تعدادی شهر وجود دارد که بعضی از آن‌ها با جاده‌ی دو طرفه به‌هم وصل شده‌اند. می‌دانیم در این کشور از هر شهر به هر شهر دیگر می‌توان با عبور از تعدادی جاده مسافرت کرد. در این کشور عجیب تنها یک اتومبیل وجود دارد. یک جهان‌گرد با خرید آن اتومبیل وارد یکی از شهرها شده است. او قصد دارد از همه‌ی شهرهای این کشور بازدید کند. در این کشور عجیب هر شهر تنها از یک میدان تشکیل شده است که تمام جاده‌های منتهی بدان شهر، به این میدان می‌رسند. در وسط میدان هر شهر یک پلیس ایستاده است و در هر لحظه تنها یک جاده را برای خروج از شهر باز می‌گذارد اما اجازه‌ی ورود به شهر را از هر جاده‌ای می دهد.

فرض کنید پلیس هر شهر بلافاصله پس از خروج اتومبیل از آن شهر، خروجی باز را می‌بندد و جاده‌ی بعد از آن را (در جهت ساعت‌گرد دور میدان) برای خروج باز می‌کند. ثابت کنید جهان‌گرد با شروع از هر شهر دل‌خواه و با هر وضعیت اولیه‌ی خروجی‌های باز، می‌تواند از همه شهرها دیدن کند. توجه کنید جاده‌ها تنها در میدان شهرها با یک‌دیگر تقاطع دارند.

مسئله‌ی ۵: دنباله .... ۲۰ امتیاز

دنباله‌ی $A = \langle a_۱, a_۲, \cdots, a_n \rangle$ از اعداد طبیعی را در نظر بگیرید. در ابتدای کار، به‌ازای هر $۱ \leq i \leq n$ می‌دانیم که $a_i = i$. هم‌چنین یک متغیر b تعریف می‌کنیم و مقدار اولیه‌ی آن را برابر ۰ می‌گذاریم.

فرض کنید $f(z)$ برابر تعداد اعدادی از دنباله‌ی A است که مقدارشان برابر z است. مثلا اگر $n = ۸$ در ابتدای کار داریم: $A = \langle ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸ \rangle$ و هم‌چنین $f(۸) = ۱$ و $f(۹) = ۰$. الگوریتم زیر را در نظر بگیرید که در هر بار اجرا، دو عدد طبیعی x و y را از ورودی می‌گیرد و پردازش می‌کند ($۱ \leq x, y \leq n$):

۱) مقدار x و y را از ورودی دریافت کن.

۲) اگر $a_x = a_y$، به مرحله‌ی ۹ برو، در غیر این صورت به مرحله‌ی ۳ برو.

۳) اگر $f(a_x) \leq f(a_y)$، به مرحله‌ی ۴ برو، در غیر این صورت به مرحله‌ی ۷ برو.

۴) B را به اندازه‌ی $f(a_x)$ واحد اضافه کن.

۵) تمام اعداد دنباله‌ی A که مقدارشان برابر a_x است را به a_y تبدیل کن.

۶) به مرحله‌ی ۹ برو.

۷) B را به اندازه‌ی $f(a_y)$ واحد اضافه کن.

۸) تمام اعداد دنباله‌ی A که مقدارشان برابر a_y است را به a_x تبدیل کن.

۹) پایان.

برای مثال اگر $n = ۸$ و الگوریتم را دو بار، ابتدا به ازای $(x, y) = (۲, ۳)$ و سپس به ازای $(x, y) = (۲, ۷)$ اجرا کنیم، پس از اجرای الگوریتم خواهیم داشت: $A = \langle ۱, ۳, ۳, ۴, ۵, ۶, ۳, ۸ \rangle$. هم‌چنین، مقدار B بعد از این دو اجرا برابر ۲ خواهد بود.

الف) فرض کنید $n = ۱۶$ و می‌خواهیم الگوریتم را ۱۵ بار اجرا کنیم. مقدار x و y را برای هر اجرا طوری تعیین کنید که پس از پایان کار، مقدار B برابر ۳۲ باشد.

ب) فرض کنید $n = ۲^k$ و می‌خواهیم الگوریتم را $n - ۱$ بار اجرا کنیم ($k \geq ۱$). ثابت کنید نمی‌توان مقادیر x و y را در این دفعات اجرا طوری تعیین کرد که پس از پایان کار مقدار B بیش‌تر از $k \times ۲^k$ شود.