

مسأله های مرحله ی اول دهمین دوره ی المپیاد ریاضی دانش آموزان کشور

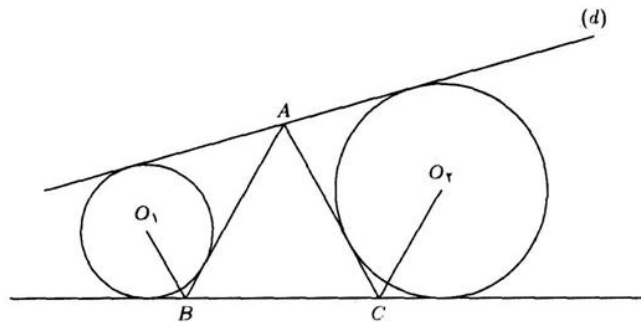
آذر ماه ۱۳۷۱

۱. همه ی جواب های درست معادله ی $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn^2} = \frac{3}{4}$ را به دست آورید.

۲. اگر X یک مجموعه ی n عضوی باشد آن گاه ثابت کنید تعداد زوج های (A, B) که A و B زیرمجموعه

های X هستند و $A \subset B$ برابر است با $2^n - 3^n$.

۳. مثلث متساوی الاضلاع ABC داده شده است. از نقطه ی A در بیرون مثلث، خطی مانند (d) رسم میکنیم. اگر O_1 و O_2 مرکز های دو دایره ای باشند که مطابق شکل به ترتیب بر AB ، BC و (d) و همچنین بر AC و BC مماس اند، آن گاه ثابت کنید که $O_1B + O_2C$ مقداری است ثابت.



۴. در معادله ی درجه ی سوم $ax^3 + bx + c = 0$ ضرایب همگی اعداد گویا هستند و می دانیم که یکی از ریشه های آن با حاصلضرب دو ریشه ی دیگر برابر است. ثابت کنید همین ریشه، عددی گویا است.

۵. همه ی اعداد اول فرد p را پیدا کنید به گونه ای که $\frac{2^{p-1} - 1}{p}$ مربع کامل گردد.

۶. در چهارضلعی گوژ $ABCD$ ، نقطه ی O محل برخورد قطر هاست. دایره های محیطی دو مثلث AOB و COD را رسم می کنیم. اگر P و Q مرکز های این دو دایره باشند آن گاه ثابت کنید

$$PQ \geq \frac{AB + CD}{4} \quad \text{که}$$

