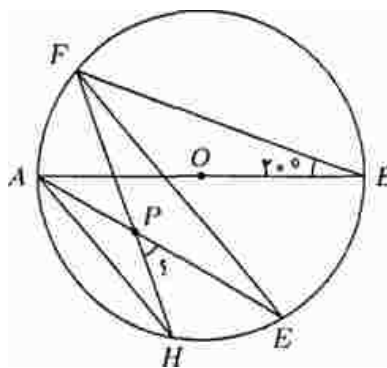


مرحله ی اول سیزدهمین دوره ی المپیاد ریاضی دانش آموزان ایران

آبان ماه ۱۳۷۴ (آزمون صبح)

(۱) در شکل AB قطری از دایره است و وتر AH با وتر FE موازی است. اگر $\angle FBA = 20^\circ$ در این صورت زاویه ی HPE برابر است با:

- الف) 20° ب) 25° ج) 30° د) 35° ه) 40°



(۲) باقیمانده ی تقسیم $5^{22} + 7$ بر ۸ برابر است با:

- الف) صفر ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ ه) ۴

(۳) اگر $x^2 - 10x + 0 = 0$ آن گاه در مورد $(x-4)(x+2)(x+1)$ کدام یک از جملات زیر درست است؟

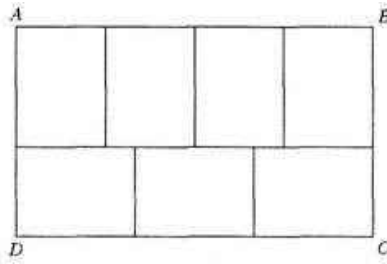
الف) عددی صحیح است. ب) مثبت و گنگ است.

ج) منفی و گنگ است. د) گویا اما غیر صحیح است.

ه) غیر حقیقی است.

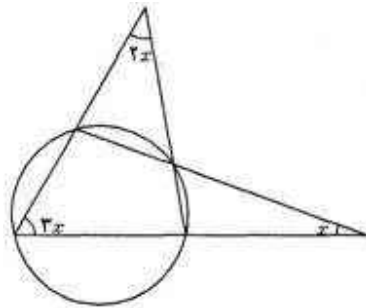
(۴) مستطیل ABCD مانند شکل به هفت مستطیل مساوی کوچکتر تقسیم شده است. اگر مساحت ABCD برابر 336 سانتیمتر مربع باشد، در آن صورت محیط ABCD بر حسب سانتیمتر برابر کدام یک از اعداد زیر است؟

- الف) ۷۶ ب) ۸۶ ج) ۹۶ د) ۱۰۶ ه) ۱۱۶



۵) در شکل زاویه ی x برابر است با:

- الف) $x=10^\circ$ ب) $x=15^\circ$ ج) $x=18^\circ$ د) $x=20^\circ$ ه) $x=25^\circ$



۶) در یک امتحان تستی با ۲۰ سؤال هر جواب صحیح ۷ نمره ی مثبت و هر جواب غلط ۲ نمره ی منفی دارد (به سؤال های بدون جواب هیچ نمره ای تعلق نمی گیرد). اگر نمره ی دانش آموزی برابر ۸۷ باشد این دانش آموز به چند سؤال جواب نداده است؟

- الف) ۲ ب) ۵ ج) ۷ د) ۹ ه) ۱۳

۷) در یک چهارضلعی محدب کدام یک از نقاط زیر دارای این خاصیت است که مجموع فواصل آن از چهار رأس چهارضلعی حداقل مقدار ممکن را دارد؟

الف) مرکز ثقل چهارضلعی ب) یکی از رئوس چهارضلعی

ج) نقطه ای بیرون چهارضلعی د) محل برخورد قطر های چهارضلعی

ه) محل برخورد پاره خط هایی که اوساط اضلاع مقابل را به هم وصل می کنند.

۸) کوچکترین عدد طبیعی را بیابید که بتوان آن را هم به صورت مجموع ۹ عدد طبیعی متوالی نوشت و هم به صورت مجموع ۱۰ عدد طبیعی متوالی (اعداد طبیعی از ۱ شروع می شوند).

الف) ۴۵ ب) ۵۵ ج) ۱۰۰ د) ۱۳۵ ه) ۴۹۵

۹) به ازای کدام مقدار n ، معادله $n = x + y + xy$ در مجموعه ی اعداد طبیعی جواب ندارد؟

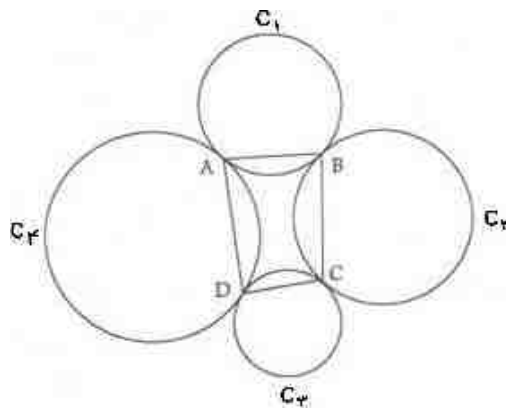
الف) $n=100$ ب) $n=105$ ج) $n=110$ د) $n=115$ ه) $n=120$

۱۰) چهار دایره ی C_1, C_2, C_3, C_4 و مطابق شکل در نقاط A, B, C, D بر هم مماس هستند. کدام یک از احکام زیر در مورد چهارضلعی $ABCD$ همواره درست است؟

الف) $ABCD$ محیطی است. ب) $ABCD$ محاطی است.

ج) $ABCD$ دوزنقه است. د) قطر های $ABCD$ بر هم عمودند.

ه) قطر های $ABCD$ همدیگر را نصف می کنند.



۱۱) فرض کنید $F(x)$ و $G(x)$ دو چندجمله ای با ضرایب صحیح بوده و $\frac{F(k)}{G(k)}$ ، به ازای $k=1, 2, 3, \dots$ عددی صحیح باشد. در این صورت کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

الف) $\frac{F\left(\frac{1}{n}\right)}{G\left(\frac{1}{n}\right)}$

به ازای هر عدد طبیعی n عددی صحیح است.

ب) F بر G بخشپذیر است.

(ج) $\frac{F'(k)}{G'(k)}$ به ازای هر عدد صحیح k صحیح است.

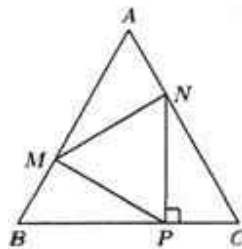
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(k)}{G(k)} = \infty \quad (\text{د})$$

(ه) درجه ی $G(x)$ صفر یا یک است.

(۱۲) مثلث متساوی الاضلاع MNP در مثلث متساوی الاضلاع ABC محاط شده است به طوری که

$NP \perp BC$. نسبت مساحت مثلث MNP به مساحت مثلث ABC برابر است با:

- (الف) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (د) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ (ه) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



(۱۳) اگر چندجمله ای ax^2+bx+c بر x^2+tx+1 قابل قسمت باشد آن گاه کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

- (الف) $a^2-2c \geq b$ (ب) $a+c > 3$ (ج) $a^2-c \geq ab$ (د) $a^2+c^2=ab$ (ه) $a^2-c^2=ab$

(۱۴) فرض کنید در مجموع زیر هر حرف انگلیسی نماینده ی عددی یک رقمی است.

SUAVE

SAGE

+SAGE

۴۶۹۳۳

در این صورت U کدام یک از اعداد زیر میتواند باشد؟

الف) ۱ ب) ۳ ج) ۵ د) ۷ ه) ۹

۱۵) چهاروجهی ABCD داده شده است. چند صفحه می توان یافت که از چهار رأس این چهاروجهی به یک فاصله باشد؟

الف) یک صفحه ب) چهار صفحه

ج) هفت صفحه د) حداکثر ۶ صفحه

ه) $\binom{4}{1} + \binom{4}{2}$ صفحه

۱۶) اگر بین اضلاع یک مثلث رابطه ی

$$c^2 - 2(a^2 + b^2)c^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$$

برقرار باشد، زاویه ی $C <$ برابر است با:

الف) دقیقاً 30° ب) دقیقاً 60° ج) دقیقاً 120°

د) 60° یا 120° ه) 30° یا 120°

۱۷) چند عدد طبیعی n وجود دارد به طوری که مجموع

$$1! + 2! + \dots + n!$$

مربع کامل باشد؟

الف) تعداد نامتناهی n ب) فقط برای دو مقدار n ج) فقط برای سه مقدار n

د) فقط برای چهار مقدار n ه) فقط برای پنج مقدار n

۱۸) چهارضلعی محدب ABCD مفروض است. مکان هندسی نقاطی از صفحه [مانند M] را بیابید به طوری که دو چهارضلعی AMCD و ABCM دارای مساحت های یکسان باشند.

الف) یک پاره خط است. ب) کمانی از دایره است. ج) خطی عمود بر BD است.

د) خطی موازی AC است. ه) خطی است که با یکی از اضلاع موازی است.

۱۹) در شکل، یک شبکه ی منظم مثلثی از نقاط شامل $\frac{10 \times 11}{2}$ نقطه را مشاهده می کنید به طوری که هر ضلع آن شامل ۱۰ نقطه می باشد. حداقل تعداد خطوطی را بیابید که از تمامی این نقاط می گذرند.

- الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ ه) ۱۰



۲۰) فرض کنید « ناحیه ی اول»، آن نقاطی از صفحه باشند که مختصات آن ها مثبت اند. ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور X ها در نظر گرفته و آن ها را به ۲۰ نقطه روی قسمت مثبت محور Y ها وصل می کنیم، از ۴۰۰ خط پدید آمده فرض کنید در ناحیه ی اول هیچ سه تایی از یک نقطه نگذرند. تعداد نقاط تقاطع این خطوط را در ناحیه ی اول بیابید.

- الف) ۷۹۸۰۰ ب) ۴۰۰۰۰ ج) ۳۶۱۰۰ د) ۴۲۰۰۰ ه) ۳۸۰۰۰

۲۱) فرض کنید $A \subseteq \{1, 2, \dots, 16\}$ مجموعه ای دلخواه باشد. سه تایی $\{a, b, c\}$ را «اولیه» گوئیم هر گاه هر دو عضو نسبت به هم اول باشند. اگر A شامل هیچ سه تایی اولیه نباشد آن گاه ماکزیم تعداد اعضای A برابر است با:

- الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۲ ه) ۱۳

۲۲) اگر در مثلث ABC داشته باشیم

$$B=2C \text{ و } a=\lambda b \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

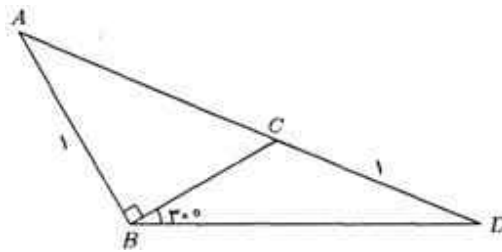
آن گاه λ در کدام یک از فواصل زیر قرار می گیرد؟

الف) $0 < \lambda \leq 1$ ب) $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$ ج) $0 < \lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$

د) $1 \leq \lambda < 2$ ه) $\frac{1}{2} \leq \lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۳) در شکل فرض کنید $AB=CD=1$ ، در این صورت طول AC برابر است با:

الف) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{2}$ ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) $\sqrt{2}$ ه) $\sqrt{2}$



۲۴) اگر رابطه ی

$$\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^n + \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}\right)^n + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^n = 1$$

برای $n=1$ صحیح باشد، آن گاه

الف) برای تمام n های زوج صحیح است. ب) برای تمام n های فرد صحیح است.

ج) برای $n=3k$ صحیح است. د) برای $n=3k+1$ صحیح است.

ه) برای $n=3k+2$ صحیح است.

۲۵) می دانیم بین اعداد 1000 و 100 ، چهار عدد طبیعی موجودند به طوری که هر یک با مجموع مکعبات رقم هایشان برابر می باشند و سه تا از آن ها عبارت اند از 407 ، 371 و 153 . عدد چهارم را دقیقاً بدست آورده و بگویید در کدام یک از فاصله های زیر قرار دارد.

الف) $[300, 400]$ ب) $[400, 500]$

ج) [۵۰۰،۶۰۰]

د) [۶۰۰،۷۰۰]

ه) [۷۰۰،۸۰۰]

(آزمون بعد از ظهر)

۱) اگر a ، b و c سه عدد حقیقی مثبت باشند، مقدار مینیمم عبارت زیر را پیدا کنید.

$$S = \left(\frac{a+b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a+c}{b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^2$$

۲) فرض کنید Γ دایره ی محیطی مثلث مفروض ABC باشد. P را نقطه ای دلخواه روی کمان ACB متمایز از نقاط A ، B و C فرض می کنیم. X و Y را به ترتیب دو نقطه روی AP و BP یا امتداد آن ها در نظر میگیریم به طوری که $AX=AC$ و $BY=BC$. ثابت کنید با تغییر دادن P ، XY از نقطه ی ثابتی می گذرد.

۳) فرض کنید X مجموعه ای دلخواه با حداقل ۱۲ عضو و $A_1, A_2, \dots, A_{1374}$ زیرمجموعه هایی ۱۲ عضوی از آن باشند (A_i ها لزوما متمایز نیستند). ثابت کنید دو زیرمجموعه ی X_1 و X_2 وجود دارند به طوری که $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ و

$$X = X_1 \cup X_2 \quad \text{و به ازای هر } 1 \leq i \leq 1374, \quad A_i \not\subseteq X_1 \text{ و } A_i \not\subseteq X_2.$$