مسأله های مرحله ی اول هشتمین المپیاد ریاضی دانش آموزان کشور

آذر ماه ۱۳۶۹

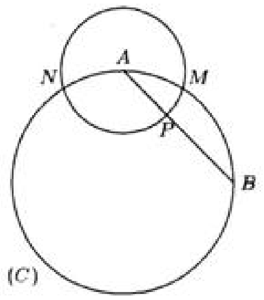
۱. اگر $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n و ... مجموعه های دلخواه باشند، مجموعه های B_n را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$B_n = \begin{cases} A_۱ & : n = ۱ \\ A_n - \bigcup_{i=۱}^{n-۱} A_i & : n \geq ۲ \end{cases}$$

الف) ثابت کنید $(n \neq m) B_n \cap B_m = \varnothing$.

ب) ثابت کنید $\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=۱}^{\infty} B_n$.

۲. وتر AB از دایره ی (C) را در نظر می گیریم. دایره ی دیگری به مرکز A و به شعاع کـوچکتر از طـول AB رسم می کنیم تا دایره ی (C) را در نقاط M و N و وتر AB را در نقطه ی P قطع کند، ثابت کنید عمودمنـصف BP از وسط کمان $\widehat{MB}$ می گذرد.



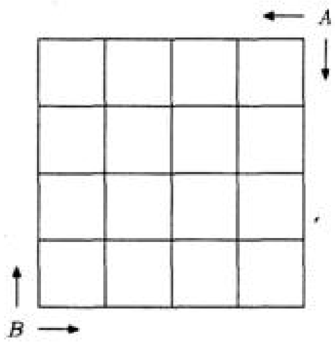
۳. نشان دهید که برای هر عدد طبیعی $n \geq ۵$، $n!$ بر کلیه ی اعـداد ۱، ۲، ... و k بخـشپذیر اسـت بـه شـرط اینکه $k+۱$ کوچکترین عدد اول بزرگتر از n باشد. (می دانیم که برای $n \geq ۲$ بین n و $[n^۲$حداقل] یک عـدد اول وجود دارد).

۴. همه ی اعداد حقیقی x، y و z را تعیین کنید که در رابطه های زیر صادق باشند:

$x(۱+y)=y(۱+z)=z(۱+x)$

۵. ثابت کنید در هر مثلث، خطوطی که اوساط اضلاع را به اوساط ارتفاع های متناظر وصل می کنند، متقارب انـد [همرس اند]. آیا می توان به جای ارتفاع ها، هر سه خط متقارب [همرس] را در نظـر گرفـت؟ چگونـه؟ ثابـت کنید.

۶. در شبکه ی 4×4 شکل زیر متحرکی از نقطه ی A به سمت نقطه ی B حرکت می کند به طوری کـه هـر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت پایین یا به سمت چپ با احتمال برابر می پیماید. همچنین متحرک دیگری از نقطه ی B به سمت نقطه ی A در حرکت است به طوری که هر ثانیه یک ضلع مربع واحد را به سمت بالا یـا به سمت راست با احتمال برابر می پیماید. اگر هر دو متحرک با هم شروع به حرکت نمایند، احتمال برخـورد دو متحرک را محاسبه کنید.



۷. از تساوی زیر f(x) را تعیین کنید.

$$\forall x \in \mathbb{R}-\{-1,0,1\},\ f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+f\left(-\frac{1}{x}\right)+f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=x$$

۸. اگر $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge 0$، $b_i>0$ و به ازای هر k ($1 \le k \le n$)،

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \le \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ثابت کنید که

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$