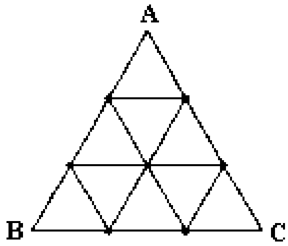
مرحله ی دوم دوازدهمین دوره ی المپیاد ریاضی دانش آموزان ایران

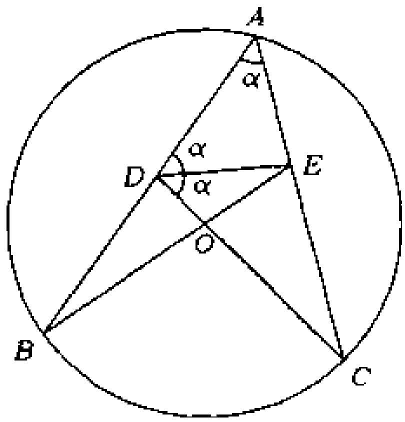
بهمن ماه ۱۳۷۳

۱. در مثلث دلخواه ABC هر ضلع را به n قسمت مساوی تقسیم کرده ایم ($n\geq 2$). از هر نقطه تقسیم روی هر ضلع، خطوطی به موازات دو ضلع دیگر رسم می کنیم. مثلا برای $n=3$ شکل زیر حاصل می شود.

برای هر $n\geq 2$ تعداد متوازی الاضلاع های به وجود آمده را مشخص کنید.



۲. در شکل نقطه ی O مرکز دایره است. زاویه ی α چند درجه است؟



۳. Z مجموعه ی اعداد صحیح و Q مجموعه ی اعداد گویا است. تمام توابع $f : Z-\{0\}\to Q$ را طوری پیدا کنید که در معادله ی تابعی زیر صدق کنند.

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

۴. اگر $\overline{a_1\cdots a_n}$ یک عدد n رقمی باشد ثابت کنید تابعی یک به یک مانند

$f : \{0,1,\ldots,9\}\to\{0,1,\ldots,9\}$

وجود دارد به طوری که $f(a_1)\neq 0$ و $\overline{f(a_1)\cdots f(a_n)}$ بر ۳ بخشپذیر باشد.

۵. فرض کنید در مثلث ABC نقاط M، N و P به ترتیب نقاط تماس دایره ی محاطی داخلی ABC بـا اضـلاع AB، AC و BC باشند. ثابت کنید مرکز ارتفاعی مثلث MNP، مرکز دایره ی محیطی [مثلث ABC] و مرکـز دایره ی محاطی مثلث ABC روی یک خط راست قرار دارند.

۶. اگر $n>3$ فرد باشد و داشته باشیم $n=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ (p_i ها اعداد اول [هستند]) و

$$m=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

نشان دهید عدد اولی مانند p وجود دارد به طوری که $p|2^m-1$ ولی $p\nmid n$.