# مرحله ی دوم سیزدهمین دوره ی المپیاد ریاضی دانش آموزان ایران

# آذر ماه ۱۳۷۴

**۱. نشان دهید برای هر عدد طبیعی $n\geq ۳$، دو مجموعه ی $A=\{x_۱,x_۲,...,x_n\}$ و $B=\{y_۱,y_۲,...,y_n\}$ از اعداد صحیح وجود دارد به طوری که**

$A\cap B=\emptyset$ **(۱)**

$x_۱+x_۲+...+x_n=y_۱+y_۲+...+y_n$ **(۲)**

$x_۱^۲+x_۲^۲+...+x_n^۲=y_۱^۲+y_۲^۲+...+y_n^۲$ **(۳)**

**۲. مثلث ABC که زوایای آن حاده هستند و خط L واقع در صفحه ی مثلث مفروض اند. قرینه های خط L را نسبت به هر یک از اضلاع مثلث ABC به دست می آوریم تا یکدیگر را در 'A، 'B و 'C قطع کنند. ثابت کنید مرکز دایره ی محاطی داخلی مثلث 'A'B'C روی دایره ی محیطی مثلث ABC قرار میگیرد.**

**۳. ۱۲k نفر در یک مهمانی شرکت کرده اند. هر نفر دقیقا با ۳k+۶ نفر دیگر از مهمانان دست می دهد. همچنین می دانیم تعداد افرادی که با [هر دو ی] هر دو نفر دست می دهند، عددی ثابت است. تعداد افراد شرکت کننده در این مهمانی را تعیین کنید.**

**۴. فرض کنید $S=\{۲^m۳^n \mid m,n\in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$. ثابت کنید که هر عدد طبیعی را می توان ب حسب حاصل جمع اعضای متمایزِ S نوشت که هیچ یک از عواملِ جمع مضربی از عامل دیگری نباشد. (مثلا ۴+۶+۹=۱۹).**

**۵. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح $n\geq ۰$ داریم:**

$$\lceil \sqrt{n}+\sqrt{n+۱}+\sqrt{n+۲}\rceil=\lceil \sqrt{۹n+۸}\rceil$$

**منظور از $\lceil x\rceil$، کوچکترین عدد صحیحی است که بزرگتر از x یا مساوی با آن است.**

**۶. در چهاروجهی ABCD فرض کنید 'A، 'B، 'C و 'D به ترتیب مراکز دوایر محیطی و مثلث های BCD، CDA، DAB و ABC باشند. اگر صفحه ای را که از نقطه ی X بر خط YZ عمود می شود، به S(X,YZ) نمایش دهیم ثابت کنید چنانچه 'A، 'B، 'C و 'D در یک صفحه نباشند چهار صفحه ی S(A,C'D')، S(B,A'D')، S(C,A'B') و S(D,B'C') از یک نقطه می گذرند.**