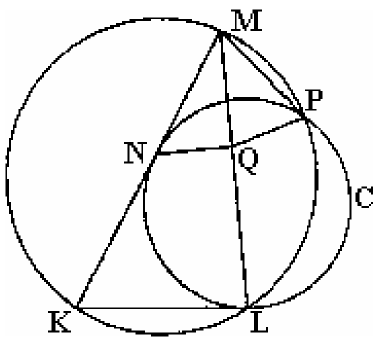
مرحله ی دوم پانزدهمین المپیاد ریاضی دانش آموزان ایران

اردیبهشت ماه ۱۳۷۶

۱. اگر x و y دو عدد طبیعی باشند به طوری که داشته باشیم: $3x^2+x=4y^2+y$، آن گاه ثابت کنید که $x-y$ یک مربع کامل است.

۲. فرض کنید KL و KN بر دایره ی C مماس باشند. M نقطه ای در امتداد KN بوده و P نقطه ی دیگر تقاطع دایره ی C با دایره ی محیطی مثلث KLM است. Q را پای عمود واصل از N بر ML می گیریم. ثابت کنید زاویه ی $MPQ=2KML$



۳. یک جدول $n\times n$ از اعداد ۰، ۱ و ۱- داریم به طوری که در هر سطر و ستون فقط یک عدد ۱ و یک عدد ۱- وجود دارد. ثابت کنید با تعدادی متناهی جا به جایی سطر ها با یکدیگر می توان جای ۱ ها را با ۱- ها عوض کرد.

۴. فرض کنید x_1، x_2، x_3 و x_4، چهار عدد حقیقی مثبت باشند که $x_1x_2x_3x_4=1$. ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 \geq \max\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i , \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i}\right\}$$

($\max\{a,b\}$ یعنی بزرگ ترین عضو مجموعه ی $\{a,b\}$).

۵. در مثلث ABC زاویه های B و C حاده اند. ارتفاع خارج شده از رأس A ضلع BC را در نقطه ی D قطع می کند. همچنین فرض کنید نیمساز های دو زاویه ی B و C ارتفاع AD را به ترتیب در نقاط E و F قطع می کنند. ثابت کنید: اگر $BE=CF$، آن گاه مثلث ABC متساوی الساقین است.

۶. اگر a و b دو عدد طبیعی باشند و $p=\frac{b}{4}\sqrt{\frac{2a-b}{2a+b}}$ یک عدد اول باشد، بزرگ ترین مقدار p را با ذکر دلیل، پیدا کنید.