مرحله ی دوم شانزدهمین دوره ی المپیاد ریاضی دانش آموزان ایران

اردیبهشت ماه ۱۳۷۷

۱. اگر $a_1<a_2<\dots<a_n$، n تا عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:

$$a_1a_2^4+a_2a_3^4+\dots+a_{n-1}a_n^4\geq a_2a_1^4+a_3a_2^4+\dots+a_na_{n-1}^4+a_1a_n^4$$

۲. مثلث ABC را در نظر می گیریم. I مرکز دایره ی محاطی آن و D نقطه ی تقاطع AI با دایره ی مذکور [با دایره ی محیطی ABC] است. فرض کنید E و F به ترتیب پای عمود های وارد از I بر BD و CD باشند. اگر $2(IE+IF)=AD$، زاویه ی $\angle BAC$ را پیدا کنید.

۳. فرض کنید n یک عدد طبیعی باشد. n تایی $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ از اعداد طبیعی را « خوب » می نامیم، اگر داشته باشیم $a_1+a_2+\dots+a_n=2n$ و نیز حاصل جمع هیچ تعدادی از a_i ها برابر n نشود. تمام n تایی های « خوب» را پیدا کنید.

(به عنوان مثال ۳ تایی (۱،۱،۴) « خوب» است ولی ۵ تایی (۱،۲،۱،۲،۴) « خوب» نیست، زیرا حاصل جمع مؤلفه های اول، دوم، چهارم برابر ۵ است.)

۴. فرض کنید که عدد طبیعی n حداقل چهار مقسوم علیه متمایز داشته باشد و $0<d_1<d_2<d_3<d_4$ چهار کوچکترین مقسوم علیه آن باشند. کلیه ی اعداد طبیعی n را پیدا کنید که $n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$.

۵. مثلث ABC که در آن $BC>CA>AB$ مفروض است. نقطه ی D را روی ضلع BC، و نقطه ی E را روی امتداد ضلع AB (نزدیک A) طوری در نظر می گیریم که $BD=BE=AC$. دایره ی محیطی مثلث BED ضلع AC را در نقطه ی P قطع می کند و BP نیز دایره ی محیطی مثلث ABC را در نقطه ی Q قطع می کند. ثابت کنید $AQ+CQ=BP$.

۶. اگر $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ و $B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$. دو n تایی از صفر و یک باشند، فاصله ی A و B را برابر تعداد i هایی میگیریم که $a_i\neq b_i$، $(1\leq i\leq n)$.

*** توضیحی که در براکت و در مساله ی ۲ آمده است، در مساله ی اصلی نبوده بلکه برای توضیح و توسط مؤلفین کتاب « المپیاد ریاضی در ایران » جلد ۲ در کتاب مفروض آمده است.**