

مرحله ی دوم هجدهمین المپیاد ریاضی ایران

مسئله ی ۱ - ۲۱ عدد متمایز از بین اعضای مجموعه ی $\{1, 2, 3, \dots, 2026\}$ انتخاب شده اند نشان دهید که می توان سه عدد متمایز a, b و c از بین آن ۲۱ عدد انتخاب کرد به طوری که رابطه ی زیر برقرار باشد.

$$bc < 2a^2 < 2bc$$

(۷ نمره)

مسئله ی ۲ - نقاط D, E و F به ترتیب روی اضلاع BC, AC و AB از مثلث ABC قرار دارند ثابت کنید دو

مثلث ABC و DEF دارای مرکز ثقل مشترک هستند اگر و فقط اگر

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB}$$

(مرکز ثقل یک مثلث محل تلاقی سه میانه ی آن مثلث است.)

(۷ نمره)

مسئله ی ۳ - مجموعه ی $\{1, 2, 3, \dots, 10000\}$ را M می نامیم نشان دهید که می توان ۱۶ زیرمجموعه از M

انتخاب کرد به طوری که برای هر $a \in M$ ، ۸ تا از این زیرمجموعه ها باشند که اشتراک آن ها دقیقاً برابر $\{a\}$ باشد.

(۷ نمره)

مسئله ی ۴ - همه ی عدد های طبیعی n را بیابید که مجموعه ی $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ را بتوان به سه مجموعه ی

مجزای A, B و C تقسیم کرد به طوری که مجموع اعضای این سه مجموعه با هم برابر باشد.

(۵ نمره)

مسئله ی ۵ - می دانیم در چهاروجهی $ABCD$ ، مجموع زاویه های هر راس برابر 180° درجه است

$$(\angle BAC + \angle CAD + \angle DAB = 180^\circ, A \text{ مثلاً در رأس } A)$$

نشان دهید که وجوه این چهاروجهی، چهار مثلث برابرند.

(۵ نمره)

مسئله ی ۶ - « ابر عدد » تعمیمی از مفهوم عدد است همان طور که می دانید هر عدد طبیعی به صورت دنباله یی

متناهی از ارقام صفر تا نوشته می شود یک « ابر عدد » دنباله ای از سمت چپ تا متناهی از ارقام صفر است، مثلاً

$3030304 \dots$ یک « ابر عدد » است توجه کنید که هر عدد خود یک « ابر عدد » است (که از جایی به بعد ارقام

آن همگی صفرند)

با همان روشی که دو عدد با هم جمع یا در هم ضرب می شوند، می توان دو « ابر عدد » را نیز با هم جمع و یا در

هم ضرب کرد مثال

$$\begin{array}{r}
 \dots 202020f \\
 \times \dots f0Y13YA \\
 \hline
 \dots Y2f2f2Y \\
 \dots Y1Y1YA \\
 \dots 9091Y \\
 \dots 020f \\
 \dots 1YA \\
 \dots Y0 \\
 \dots 6 \\
 \hline
 \dots 002891Y \quad \text{و} \quad \dots Y60168Y
 \end{array}$$

الف) فرض کنید A یک « ابر عدد » است ثابت کنید « ابر عدد » B وجود دارد که $A + B = \bar{0}$ (منظور از $\bar{0}$ « ابر عدد » ای است که همه ی رقم های آن صفر است)

ب) تمام ابر عدد های A را پیدا کنید که وارون ضربی دارند، یعنی ابر عدد B وجود دارد که $A \times B = \bar{01}$ (منظور از $\bar{01}$ « ابر عدد » $\dots 0001$ است) .

ج) آیا درست است که اگر $A \times B = \bar{0}$ آن گاه $A = \bar{0}$ و یا $B = \bar{0}$ ؟ چرا؟

(۱۱ نمره)

