مرحله ی دوم بیستمین المپیاد ریاضی دانش آموزان ایران

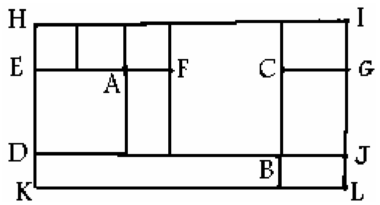
اردیبهشت ماه ۱۳۸۱

نوبت اول

۱) $a_1,a_2,\ldots,a_n$ را یک "جایگشت " از اعداد $1,2,\ldots,n$ می نامیم هر گاه $\{a_1,a_2,\ldots a_n\}=\{1,2,\ldots,n\}$ (یعنی a_1 تا a_n همان اعداد ۱ تا n هستند که احتمالا ترتیب آن ها تغییر نکرده است). تمام جایگشت های ۱ تا n مانند $a_1,a_2,\ldots,a_n$ را بیابید که برای هر $1\le i\le n$، $2(a_1+a_2+\ldots+a_i)$ بر $i+1$ بخش پذیر باشد.

برای مثال $a_1=3$، $a_2=1$، $a_3=4$ و $a_4=2$ یک جایگشت از اعداد ۱، ۲، ۳، و ۴ است.

۲) یک مستطیل را به وسیله ی تعدادی مستطیل (کوچک تر) پوشانده ایم به طوری که مستطیل ها به جز احتمالا در رئوس و اضلاع با هم اشتراکی ندارند. در ضمن اضلاع مستطیل های پوشاننده موازی اضلاع مستطیلی اصلی هستند، همچنین هیچ قسمتی از این مستطیل ها بیرون از مستطیل اصلی قرار نمی گیرد. برای مثال، شکل زیر یکی از این حالت ها را نشان می دهد:



بنابراین هر طور که مستطیل را به وسیله ی مستطیل های کوچک تر با توجه به شرایط فوق بپوشانیم در شکل حاصل تعدادی خط (پاره خط) افقی و عمودی و تعدادی نقاط برخورد پاره خط ها دیده می شود، یک نقطه ی برخورد را یک "چهار راه " می گوئیم هر گاه محل تقاطع دو پاره خط باشد، مثلا در شکل بالا نقاط A و B چهارراه هستند ولی نقاط C، D و K چهارراه نیستند، همچنین در این شکل ۵ خط افقی (KL, DJ , CG , EF , HI) و ۶ خط عمودی دیده می شود، در ضمن شکل به وسیله ی ۱۰ مستطیل پوشانده شده است.

نشان دهید در هر صورت اگر تعداد خط های افقی، عمودی و تعداد چهار راه ها را در نظر بگیریم و این سه عدد را با هم جمع کنیم، حاصل برابر است با تعداد مستطیل های پوشاننده به اضافه ی عدد سه.

۳) در چهارضلعی محدّب ABCD داریم $\angle ABC=\angle ADC=135^\circ$. ضمنا M و N به ترتیب نقاطی روی (امتداد) AD و AB می باشند به طوری که $\angle MCD=\angle NCB=90^\circ$، همچنین K محل برخورد دوم دایره های محیطی دو مثلث ABD و AMN می باشد. ثابت کنید AK بر KC عمود است.

نوبت دوم

۴) A و B دو نقطه ی ثابت در صفحه می باشند. چهارضلعی محدّب $ABCD$ به گونه ای ساخته می شود که $AB = BC$ و $AD = DC$ و زاویه ی $\angle ADC=90^{\circ}$. ثابت کنید نقطه ای ثابت وجود دارد به طوری که هر چهارضلعی $ABCD$ را در یک طرف AB بسازیم خط گذرنده از DC همواره از این نقطه می گذرد.

۵) مجموعه ی اعداد حقیقی را با اضافه کردن موجودی جدید به نام δ به فضای بزرگ تری توسعه داده ایم، فضای جدید را با $R[\delta]$ نشان می دهیم و اعضای آن موجوداتی به شکل $a+b\delta$ هستند که $a,b \in R$. (R نشان دهنده ی مجموعه ی اعداد حقیقی است.)

قرارداد میکنیم که $a+b\delta=a'+b'\delta$ اگر و تنها اگر $a=a'$ و $b=b'$. δ موجودی بسیار کوچک است به طوری که هر چند صفر نیست ولی $\delta^2=0$!

روی این فضا جمع و ضرب به شکل زیر تعریف می شود:

$$(a+b\delta)+(a'+b'\delta)=(a+a')+(b+b')\delta$$

$$(a+b\delta)(a'+b'\delta)=aa'+ab'\delta+ba'\delta+bb'\delta^2=aa'+(ab'+ba')\delta$$

فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله ای با ضرایب حقیقی باشد، نشان دهید این چندجمله ای در R ریشه ای مضاعف دارد اگر و تنها اگر در $R[\delta]$ ریشه ای غیر حقیقی داشته باشد.

(ریشه ی غیر حقیقی یعنی ریشه ای به شکل $a+b\delta$ که $b\neq 0$).

توضیح: می گوییم a ریشه ی مضاعف چندجمله ای $P(x)$ است اگر $P(x)$ بر $(x-a)^2$ بخش پذیر باشد.

۶) در یک کلاس ۲۰ نفره در سال گذشته ۱۰۰ مسابقه ی تنیس روی میز بین بچه های کلاس برگزار شده است، هیچ دو نفری بیش از یک بار با هم مسابقه نداده اند. بچه های کلاس می خواهند از بین خود دو تیم دو نفره (دو تیم عضو مشترک ندارند) برای شرکت در مسابقات مدرسه انتخاب کنند با این شرط که دو عضو یک تیم در سال گذشته با هم بازی نکرده باشند، می دانیم که این کار به ۴۰۵۰ طریق مختلف امکان پذیر است. ثابت کنید همه ی بچه های کلاس در سال گذشته به تعداد مساوی بازی کرده اند.