

مرحله دوم بیست و ششمین المپیاد ریاضی کشور

بهار ۱۳۸۷

۱- به چند طریق می توان $n-3$ قطر یک n ضلعی منتظم را طوری رسم کرد که اولاً هم دیگر را داخل n ضلعی قطع نکنند، ثانیاً هر کدام از مثلث های به وجود آمده، دست کم یک ضلع مشترک با n ضلعی داشته باشد؟

۲- فرض کنید I_a مرکز دایره ی محاطی خارجی مثلث ABC ، متناظر با رأس A باشد، و این دایره، به ترتیب، در نقاط B' و C' به امتداد AB و AC مماس باشد. I_aB و I_aC به ترتیب، $B'C'$ را در P و Q قطع می کنند و M نقطه ی برخورد CP و BQ است. ثابت کنید طول عمود وارد از M بر ضلع BC برابر اندازه ی شعاع دایره ی محاطی داخلی مثلث ABC است.

۳- a, b, c, d اعدادی حقیقی هستند و دست کم یکی از c, d صفر نیست. تابع $f: R \rightarrow R$ با ضابطه ی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید برای هر x ، $f(x) \neq x$. نشان دهید اگر به ازای یک a ، $f^{1387}(a) = a$ ، آنگاه برای هر x در دامنه ی f^{1387} ، $f^{1387}(x) = x$. (یعنی f^n بار ترکیب تابع f)
راهنمایی: نشان دهید برای هر تابع به شکل $g(x) = \frac{sx+t}{ux+v}$ ، اگر معادله ی $g(x) = x$ بیش از دو جواب داشته باشد، آنگاه برای هر x ، $g(x) = x$.

۴- نشان دهید تنها عدد طبیعی a ، که برای هر عدد طبیعی n ، $4(a^n + 1)$ مکعب کامل باشد، یک است.

۵- می خواهیم برای تلفن های یک شهر شماره انتخاب کنیم. شماره ها ده رقمی اند و از رقم صفر نباید در آنها استفاده شود. هدف این است که از برخی از شماره ها استفاده نکنیم تا هر دو شماره ی موجود یا در بیش از یک رقم اختلاف داشته باشند و یا در یک رقم بیش از یک واحد اختلاف داشته باشند. بیشترین تعداد شماره که می تواند استفاده شود، چند تاست؟ انتخاب این بیشترین تعداد شماره، به چند طریق ممکن است؟

۶- فرض کنید در مثلث ABC ، H پای ارتفاع وارد بر BC باشد. از H بر AB و AC عمود می کنیم تا، به ترتیب، نقاط T و T' به دست آیند. اگر O مرکز دایره ی محیطی مثلث ABC باشد و $AC = 2OT$ ، نشان دهید:

$$AB = 2OT'$$